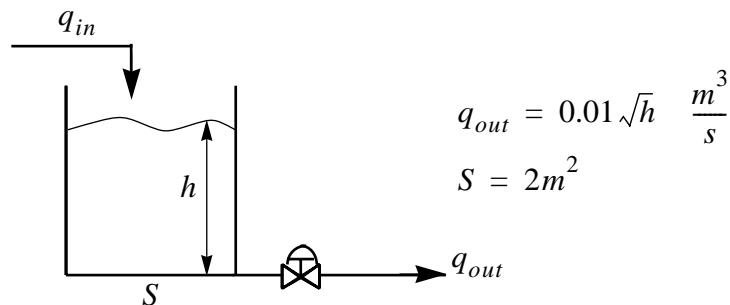


□ **Exercice 1**



- *Etat stationnaire*

$$\bar{q}_{in} = \bar{q}_{out}$$

et par conséquent:

$$0.015 \left[\frac{m^3}{s} \right] = 0.01 \sqrt{\bar{h}} \left[\frac{m^3}{s} \right] \Rightarrow \bar{h} = 2.25 [m]$$

- *Bilan massique*

$$S\rho \frac{dh}{dt} = \rho q_{in} - \rho q_{out} = \rho q_{in} - \rho(0.01 \sqrt{h}) \quad (1)$$

- a) Vider le réservoir de moitié

Pour $t \geq 0$, $q_{in} = 0$ et ainsi:

$$S \frac{dh}{dt} = -0.01 \sqrt{h}$$

En intégrant l'équation par séparation des variables:

$$\int_{\bar{h}}^{\bar{h}/2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.01}{S} \int_0^T dt \quad (2)$$

et avec $S = 2[m^2]$ et $\bar{h} = 2.25[m]$ on obtient: $T = 176[s]$

b) Vider complètement le réservoir

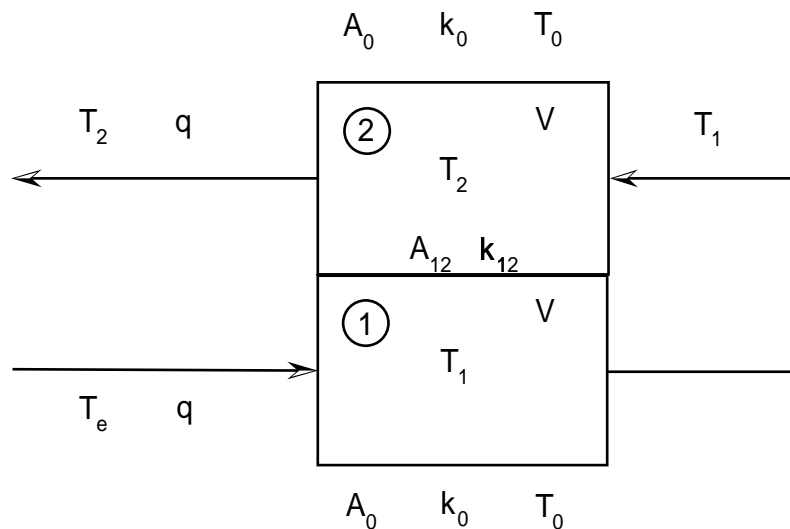
$$\int_{\bar{h}}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{0.01}{S} \int_0^T dt \Rightarrow T = 600[s]$$

Remarque: Si le débit q_{out} était proportionnel à h , $q_{out} = kh$, alors:

$$S \frac{dh}{dt} = -kh \Rightarrow \int_{\bar{h}}^h \frac{dh'}{h'} = -\frac{k}{S} \int_0^t dt' \Rightarrow h(t) = \bar{h} e^{-(k/S)t}$$

et par conséquent $t \rightarrow \infty$ pour $h(t) \rightarrow 0$.

□ **Exercice 2**



a) *Modèle dynamique*

- Bilan thermique pour la zone 1:

$$V\rho c_p \frac{dT_1}{dt} = q\rho c_p(T_e - T_1) - k_{12}A_{12}(T_1 - T_2) - k_0A_0(T_1 - T_0) \quad (1)$$

- Bilan thermique pour la zone 2:

$$V\rho c_p \frac{dT_2}{dt} = q\rho c_p(T_1 - T_2) - k_{12}A_{12}(T_2 - T_1) - k_0A_0(T_2 - T_0) \quad (2)$$

b) *Non-linéarité*

- Dans chaque équation différentielle, on a le produit qT qui apparaît;
- Si q est variable, représentant par exemple la variable d'entrée du système: modèle non linéaire;
- Si q est constant: modèle linéaire.

c) *Equivalence des deux systèmes*

Bilan thermique pour le cas 2 (une seule zone):

$$2V\rho c_p \frac{dT}{dt} = q\rho c_p (T_e - T) - 2k_0 A_0 (T - T_0) \quad (3)$$

Bilan thermique combiné (équations(1) et (2)) pour le cas 1 (deux zones):

$$V\rho c_p \left(\frac{dT_1}{dt} + \frac{dT_2}{dt} \right) = q\rho c_p (T_e - T_2) - 2k_0 A_0 \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) \quad (4)$$

- Les deux systèmes ne sont donc pas équivalents;
- Cas 1 correspond au cas 2 pour $T_1 = T_2 = T$.

d) Si les deux zones ne sont pas homogènes, le système devient à paramètres répartis (décrit par des équations différentielles partielles).

□ **Exercice 3**

a) *Modèle dynamique*

- Hypothèse: $\rho = \text{const}$
- Bilan massique:

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = \rho q_e - \rho q_s$$

$$\frac{dV(h)}{dt} = q_e - q_s \quad (1)$$

- Calcul du volume $V(h)$:

$$r = \frac{R}{H}h \quad (2)$$

$$V(h) = \int_0^h A(h')dh' = \int_0^h \pi r^2(h')dh' = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^h h'^2 dh' = \frac{\pi R^2}{3H^2} h^3 \quad (3)$$

- Calcul de dh/dt :

$$\frac{dV(h)}{dh} = \frac{\pi R^2}{3H^2} 3h^2 = \frac{\pi R^2}{H^2} h^2 \quad (4)$$

$$\frac{dV(h)}{dt} = \frac{dV(h)}{dh} \frac{dh}{dt} = q_e - q_s \quad (5)$$

(4) dans (5):

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{H^2}{\pi R^2} \frac{q_e - q_s}{h^2} \quad (6)$$

Condition initiale: h_0

b) *Grandeurs caractéristiques*

- entrée: $q_s(t)$
- état: $h(t)$
- sortie: $h(t)$
- paramètres: H, R

Le débit d'entrée q_e est considéré comme une perturbation. En effet, q_e reste normalement constant (perturbation nulle). Si $q_e(t)$, perturbation autour de la valeur nominale \bar{q}_e .

c) Le modèle dynamique est *non linéaire* et *stationnaire*.

$$\text{Etat stationnaire: } \frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{q}_e = \bar{q}_s \quad \bar{h} = \text{quelconque}$$