❑ Exercice 1

a) Les équations qui décrivent les dynamiques du cylindre extérieur et du cylindre intérieur sont respectivement:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = M - f_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = f_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - f_2\dot{\theta}_2$$

avec des conditions initiales appropriées.

b) Au point stationnaire $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = cte$, ce qui implique $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0$. Les équations dynamiques donnent:

$$M = f_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$f_2\dot{\theta}_2 = f_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

d'où: $\dot{\theta}_2 = \dfrac{M}{f_2}$ et $\dot{\theta}_1 = M\dfrac{(f_1 + f_2)}{f_1 f_2}$.

Le rapport des vitesses est par conséquent:

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{f_1}{f_1 + f_2}$$

c) La puissance transmise au cylindre intérieur est la puissance transmise par le fluide:

$$f_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 = P_{fluide \to cyl2}$$

La fraction de puissance transmise est:

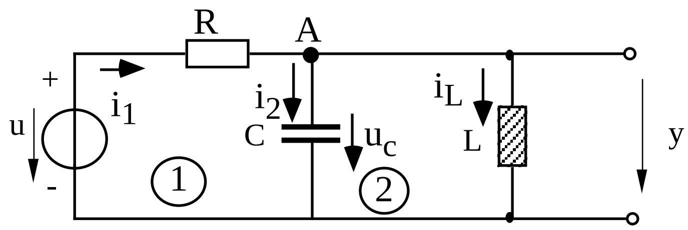
$$\alpha = \frac{P_{fluide \to cyl2}}{P_{ext}} \quad \text{où} \quad P_{ext} = M\dot{\theta}_1$$

$$\text{--->}\ \alpha = \frac{f_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2}{M\dot{\theta}_1} = \frac{M\dot{\theta}_2}{M\dot{\theta}_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1}$$

Par conséquent, la fraction de puissance transmise est:

$$\alpha = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{f_1}{f_1 + f_2}$$

❑ Exercice 2



$C = \alpha_0 + \alpha_1 y$

Deux états correspondant aux deux éléments dynamiques C et L :

$$\begin{cases} x_1 = u_c = y \\ x_2 = i_L \end{cases}$$

Lois de Kirchhoff pour les mailles et les noeuds:

- boucle 1: $i_1 R + x_1 - u = 0$ *(1)*

- boucle 2: $y - x_1 = 0$ *(2)*

- noeud A: $i_1 = i_2 + x_2$ *(3)*

Relations dynamiques pour C et L :

$$i_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}Cx_1 = \frac{d}{dt}(\alpha_0 + \alpha_1 x_1)x_1 = (\alpha_0 + 2\alpha_1 x_1)\dot{x}_1$$

$$x_1 = L\dot{x}_2$$

Eliminons les variables intermédiaires i_1 et i_2 :

$$\textit{(1)} \dashrightarrow i_1 = \frac{u - x_1}{R}$$

$$\textit{(3)} \dashrightarrow i_2 = \frac{u - x_1}{R} - x_2$$

pour obtenir le modèle dynamique *non linéaire* suivant liant l'entrée u aux états x_1 et x_2 :

$$\frac{u - x_1}{R} - x_2 = (\alpha_0 + 2\alpha_1 x_1)\dot{x}_1$$

$$x_1 = L\dot{x}_2$$

ou

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{\alpha_0 + 2\alpha_1 x_1}\left[\dfrac{u}{R} - \dfrac{x_1}{R} - x_2\right] \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{L}x_1 \end{array}\right.$$

❑ **Exercice 3**

a) *Hypothèses*:

- masse volumique du liquide $\rho = \text{const}$
- température $T = \text{const}$

Notations:

- R	constante des gaz parfaits
- c_1	constante de la vanne
- $c_2 = n_G RT$	constante
- g	constante de gravitation

Modèle:

Bilan massique pour le liquide:

$$\frac{d}{dt}m(t) = \frac{d}{dt}[\rho A h(t)] = \rho A\frac{d}{dt}h(t) = \rho q_e(t) - \rho q_s(t)$$

$$A\frac{d}{dt}h(t) = q_e(t) - q_s(t) \qquad (1)$$

Relations constitutives:

- Débit de fuite: $q_s(t) = c_1[p_1(t) - p_a]$ *(2)*

  avec $p_1(t) = p(t) + \rho g h(t)$ *(3)*

- Volume de gaz: $V_G(t) = [H - h(t)]A$ *(4)*

- Gaz parfait avec *(4)*: $p(t) = \dfrac{c_2}{V_G(t)} = \dfrac{c_2}{[H - h(t)]A}$ *(5)*

(2), *(3)*, *(5)* dans *(1)*:

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{A}\left\{q_e(t) - c_1\left(\frac{c_2}{[H - h(t)]A} + \rho g h(t) - p_a\right)\right\} \qquad (6)$$

Condition initiale: $h(0) = h_0$

b) Les grandeurs caractéristiques du système sont:

- variable d'état $h(t)$
- variable d'entrée $q_e(t)$
- variable de sortie $h(t)$ ou $q_s(t)$ ou $p(t)$ selon les besoins de l'étude
- paramètres ρ, A, H, c_1, c_2, p_a

Ce modèle d'état est *non linéaire*.

c) Selon l'équation *(6)*, l'opération de ce système dépend de la pression atmosphérique p_a.