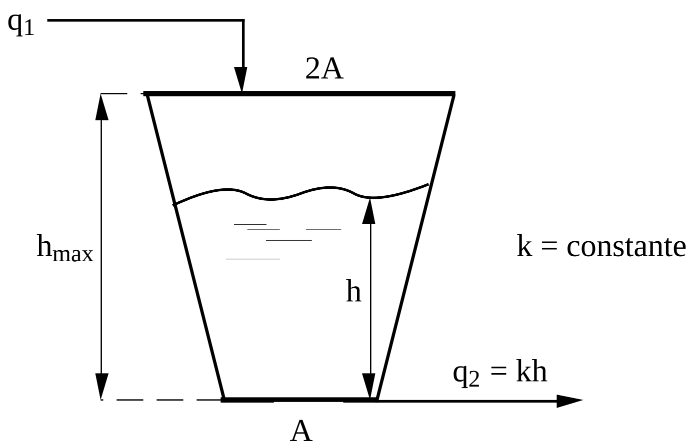
❑ Exercice 1

$$S(h) = A\left(1 + \frac{h}{h_{max}}\right)$$



a) *Modèle dynamique*

- Bilan massique:

$$\rho\frac{dV}{dt} = \rho q_1 - \rho kh \tag{1}$$

avec $dV(h) = S(h)dh$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = S(h)\frac{dh}{dt} = A\left(1 + \frac{h}{h_{max}}\right)\frac{dh}{dt} \tag{2}$$

et ainsi:

$$A\left(1 + \frac{h}{h_{max}}\right)\frac{dh}{dt} + kh = q_1 \tag{3}$$

- Hypothèse:

masse volumique $\rho = const$

Le système dynamique est *non linéaire*. Il n'est donc pas possible de calculer une fonction de transfert sans procéder auparavant à une linéarisation autour du point d'équilibre: $q_1 = 0.5\ m^3/min$ et $h = 1m$.

b) Fonction de transfert $H(s)/Q_1(s)$

- *Etat stationnaire* (q_1, h)

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = 0$$

et *(3)* donne:

$$\bar{q}_1 = k\bar{h} \Rightarrow k = 0.5\,\frac{m^2}{min}$$

- *Linéarisation*

Le terme non linéaire $h(dh/dt)$ est linéarisé autour de $(h, dh/dt = 0)$ en considérant la partie linéaire d'un développement en série de Taylor:

$$h\frac{dh}{dt} \approx \bar{h}\frac{d\bar{h}}{dt} + \frac{d\bar{h}}{dt}(h - \bar{h}) + \bar{h}\left(\frac{dh}{dt} - \frac{d\bar{h}}{dt}\right) = \bar{h}\frac{dh}{dt}$$

L'équation *(3)* devient ainsi:

$$\bar{A}\frac{dh}{dt} + kh = q_1 \qquad \text{avec} \qquad \bar{A} = A\left(1 + \frac{\bar{h}}{h_{max}}\right) \tag{4}$$

Il s'agit d'un système dynamique linéaire du premier ordre.

- *Calcul de la fonction de transfert*

En prenant la transformée de Laplace de *(4)*:

$$AsH(s) + kH(s) = Q_1(s)$$

ce qui donne la fonction de transfert suivante:

$$\frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{\bar{A}s + k} = \frac{1/k}{\frac{\bar{A}}{k}s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

avec:

$$K = \frac{1}{k} = 2\,\frac{min}{m^2}$$

$$\tau = \frac{\bar{A}}{k} = \frac{A\left(1 + \frac{h}{h_{max}}\right)}{k} = 3min$$

❑ Exercice 2

a) La transformée de Laplace de l'équation:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = \dot{u} + u \qquad y(0) = 1, \dot{y}(0) = u(0) = 0$$

est: $Y(s)(s^2 + 4s + 4) = U(s)(s + 1) + (s + 4)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 4}$$

b) $u(t) = \delta(t - 1)$

$U(s) = e^{-s}$

$$Y(s) = \frac{(s+1)e^{-s} + (s+4)}{s^2 + 4s + 4} = \underbrace{Y_1(s)e^{-s}}_{\text{réponse forcée}} + \underbrace{Y_2(s)}_{\text{réponse libre}}$$

- $Y_1(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s+2)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{(s+2)^2}$

  Méthode des résidus:

  $$A = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds}[(s+2)^2 Y_1(s)] = \lim_{s \to -2} 1 = 1$$

  $$B = \lim_{s \to -2} (s+2)^2 Y_1(s) = \lim_{s \to -2} (s+1) = -1$$

- $Y_2(s) = \dfrac{s+4}{s^2 + 4s + 4} = \dfrac{C}{s+2} + \dfrac{D}{(s+2)^2}$

  $$C = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds}[(s+2)^2 Y_s(s)] = \lim_{s \to -2} 1 = 1$$

  $$D = \lim_{s \to -2} (s+2)^2 Y_2(s) = \lim_{s \to -2} (s+4) = 2$$

  $$y_1(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}\right] = \varepsilon(t)[e^{-2t} - te^{-2t}]$$

  $$y_2(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}\right] = \varepsilon(t)[e^{-2t} + 2te^{-2t}]$$

- Finalement on obtient:

  $$y(t) = \varepsilon(t-1)[e^{-2(t-1)} - (t-1)e^{-2(t-1)}] + \varepsilon(t)[e^{-2t} + 2te^{-2t}]$$

❑ Exercice 3

Soit la réponse impulsionnelle:

$$g(t) = 2\varepsilon(t)e^{-2t}$$

a) La fonction de transfert du système correspondant est donnée par:

$$G(s) = L[g(t)] = \frac{2}{s+2}$$

b) La réponse à un saut indiciel $u(t) = \varepsilon(t)$ est donnée par:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{(s+2)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

Ainsi:

$$\gamma(t) = y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \varepsilon(t) - \varepsilon(t)e^{-2t} = \varepsilon(t)[1 - e^{-2t}]$$

c) La transformée de Laplace de l'entrée $u(t) = \varepsilon(t-1)e^{-(t-1)}$ est obtenue en utilisant la règle de translation temporelle:

$$U(s) = e^{-s}L[\varepsilon(t)e^{-t}] = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

La réponse à cette entrée est:

$$y(t) = L^{-1}[G(s)U(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)}\frac{e^{-s}}{(s+1)}\right] = L^{-1}[Y_1(s)e^{-s}]$$

On considère d'abord le terme $Y_1(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)}$ puisque le terme e^{-s} ne fera que retarder la réponse $y_1(t)$ d'une unité de temps:

$$Y_1(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

Ainsi $\quad y_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} \qquad t \geq 0$

et $\quad y(t) = y_1(t-1) = 2e^{-(t-1)} - 2e^{-2(t-1)} \qquad t \geq 1$