❑ Exercice 1

a) Le système est linéaire, non stationnaire, causal et pas initialement au repos.

b) Un système non causal pourrait être représenté par:

$$\dot{y}(t) = 2ty(t) + 3u(t+2)$$

Dans ce cas, une entrée future agirait sur la sortie à l'instant présent, ce qui n'est pas possible pour un système physique.

❑ Exercice 2

a) Un système est linéaire si le principe de superposition s'applique. Soit:

$$u_1 \to y_1 \quad \text{avec} \quad \ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 = u_1,\ y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$$

$$u_2 \to y_2 \quad \text{avec} \quad \ddot{y}_2 + 3\dot{y}_2 + 2y_2 = u_2,\ y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$$

La somme de ces deux équations dynamiques donne:

$$(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + 3(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 2(y_1 + y_2) = u_1 + u_2$$

qui est égale, par linéarité de la dérivation, à:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u \quad \text{avec} \quad y = y_1 + y_2,\ u = u_1 + u_2$$

On voit que la somme des deux réponses (y) correspond à la sortie du système excité par la somme des deux entrées (u). Ainsi, le principe de superposition s'applique et le système est linéaire.

b) Le système est non linéaire dès que les variables u et y ou leurs dérivées apparaissent non linéairement dans l'équation, par exemple:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = uy \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

c) Pour des conditions initiales différentes de zéro, le système ne sera pas relâché au temps $t = 0$. Il s'ensuit que la réponse du système dépendra de l'excitation u (*réponse forcée*) et des conditions initiales (*réponse libre*). Si le système est linéaire, le principe de superposition s'applique aussi bien à la réponse libre qu'à la réponse forcée.

❑ Exercice 3

a) Entrée: force F

Sortie: position angulaire θ

Etat: position du chariot y, vitesse du chariot $v = \dot{y}$,

position angulaire θ, vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$

b) La simulation du système consiste à transcrire son modèle mathématique sous forme d'algorithmes implantés dans un ordinateur et d'étudier le comportement du système en observant l'évolution temporelle des états $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $y(t)$ et $\dot{y}(t)$ pour une entrée $F(t)$ donnée.