

# **Identification d'un système** **de positionnement à deux** **axes**

Etudiant : David Ribeiro

Encadrement : Marc Kunze, Alireza Karimi, Roland Longchamp

## Table des matières

1	Introduction .....	3
2	Matériel à disposition .....	3
3	Modèle de connaissance .....	3
3.1.1	Modèle selon l'axe x .....	4
3.1.2	Modèle selon l'axe y .....	7
4	Identification non paramétrique .....	9
4.1	Génération du signal d'excitation .....	9
4.2	Méthode fréquentielle .....	11
4.3	Résultats obtenus .....	12
4.3.1	Système à identifier non-fixé .....	12
4.3.2	Système à identifier fixé sur une table .....	13
4.4	Evaluation des paramètres .....	15
4.5	Visualisation des résultats obtenus .....	19
5	Expression des coefficients .....	23
5.1	Première méthode .....	23
5.2	Deuxième méthode .....	25
5.3	Troisième méthode .....	29
6	Conclusion .....	29
7	Bibliographie .....	30

## 1 Introduction

Nous avons à disposition un système de positionnement à deux axes sur le plan horizontal. Le but de ce travail est d'identifier la dynamique de ce système dans le but de pouvoir le commander en position avec une haute précision. Pour atteindre notre objectif, la fonction de transfert résultante devra non seulement dépendre de la fréquence du signal injecté, mais également de la position du système.

## 2 Matériel à disposition

Le matériel que nous avons à disposition pour ce travail se présente de la manière suivante :

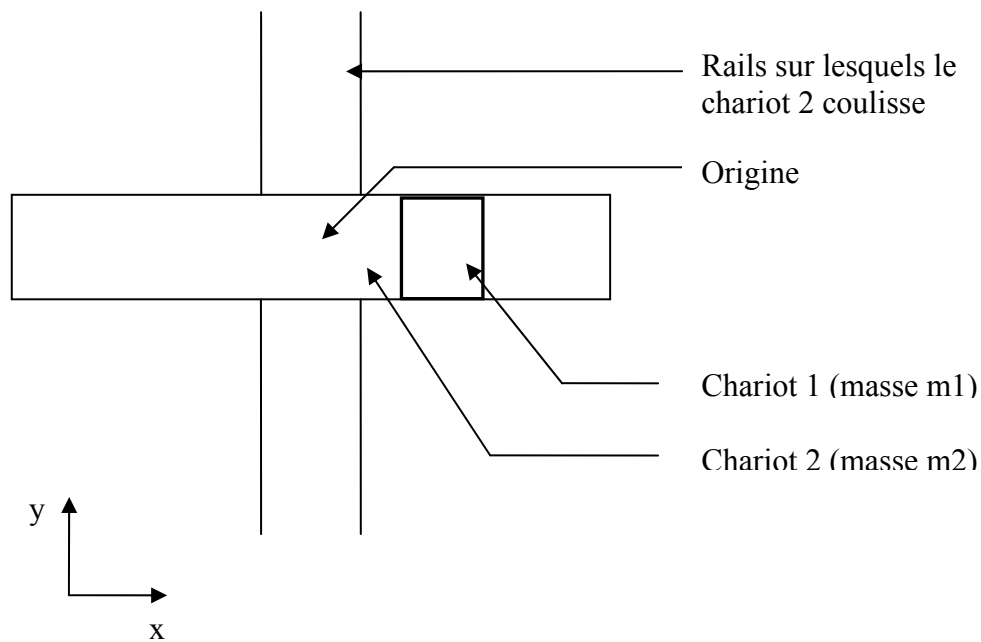


Figure 1

Nous commanderons le tout via le logiciel Matlab et une carte de type DSMax 2 pour l'alimentation des moteurs linéaires du système illustré en figure 1.

## 3 Modèle de connaissance

Pour commencer, nous allons établir une modélisation mécanique de notre système à identifier à l'aide de ressorts et d'amortisseurs. Dans un premier temps, pour simplifier le problème, nous allons découpler le système en deux sous-systèmes que nous pourrions modéliser selon deux schémas distincts. En effet, si nous excitons le système sur un seul axe à

la fois, il est possible de subdiviser le problème en deux : le premier selon l'axe x et le deuxième selon l'axe y.

### 3.1.1 Modèle selon l'axe x

Voici le schéma équivalent que nous obtenons selon l'axe x :

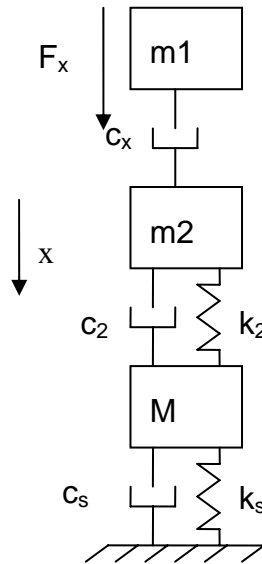


Figure 2

Nous pouvons remarquer que cette modélisation comporte trois masses, où :

- $m_1$  = masse du chariot 1
- $m_2$  = masse du chariot 2
- $M$  = masse du socle supportant l'ensemble du système

Si l'on se réfère au dessin de la figure 1, nous pouvons voir que la masse  $m_1$  frotte sur  $m_2$ , ce que nous avons modélisé par un amortisseur  $c_x$  constant. Dans le souci de rester dans un cas de figure le plus général possible, nous modéliserons la liaison entre  $m_2$  et  $M$  par un ressort et un amortisseur  $c_2$  et  $k_2$ , car la rigidité de cette liaison n'est évidemment pas infinie. Et enfin, nous ferons de même pour la liaison entre le socle et le sol avec les coefficients  $c_s$  et  $k_s$ . Ici, tous les coefficients  $k$  et  $c$  sont constants.

Si nous appliquons la deuxième loi de Newton sur chacune des trois masses nous obtenons :

Pour la masse  $m_1$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_x (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_x$$

Équation 1

Pour la masse m2

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_x(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_2(x_2 - x_3)$$

Équation 2

Pour la masse M

$$M \ddot{x}_3 = -c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - c_s \dot{x}_3 - k_2(x_3 - x_2) - k_s x_3$$

Équation 3

Où :

- $x_1$  = Mouvement de la masse m1
- $x_2$  = Mouvement de la masse m2
- $x_3$  = Mouvement de la masse M
- $F_x$  est la force appliquée par le moteur de l'axe x sur m1

Puis, en passant ces trois équations dans Laplace, nous obtenons :

$$x_1 [m_1 s^2 + c_x s] = c_x x_2 s + F_x$$

Équation 4

$$x_2 = \frac{c_x s}{m_2 s^2 + (c_x + c_2) s + k_2} x_1 + \frac{c_2 s + k_2}{m_2 s^2 + (c_x + c_2) s + k_2} x_3$$

Équation 5

$$x_3 = \frac{c_2 s + k_2}{M s^2 + (c_s + c_2) s + k_2 + k_s} x_2$$

Équation 6

Ainsi, en substituant les équations 5 et 6 dans l'équation 4, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{x_1}{F_x} = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s}$$

Équation 7



Nous pouvons donc voir que l'allure générale du diagramme en amplitude est celle d'un intégrateur en basses fréquences, puis celle d'un double intégrateur dans les hautes fréquences. De plus nous pouvons aisément voir la présence d'un effet résonnant, qui se produit ici aux alentours de 40 radians par seconde.

### 3.1.2 Modèle selon l'axe y

Voici le schéma équivalent que nous obtenons selon l'axe y :

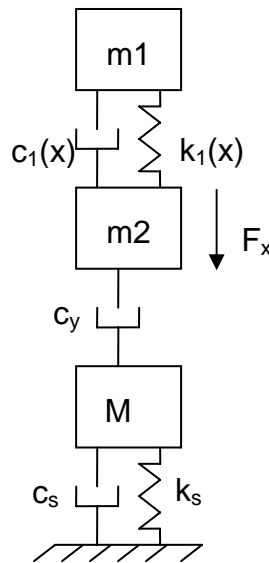


Figure 4

La nomenclature des masses en figure 4 correspond à celle de la figure 2. En voyant le dessin en figure 1, nous pouvons admettre que la liaison entre les chariots 1 et 2 n'est pas parfaitement rigide. Pour cette raison nous l'avons donc modélisée par un ressort et un amortisseur. De plus, dans ce cas de figure, il est évident que lorsqu'on déplace le chariot 2 selon l'axe y, la réponse du système ne sera pas la même en fonction de la position du chariot 1. Ainsi, pour faire apparaître cette dépendance, nous utiliserons des coefficients  $c_1(x)$  et  $k_1(x)$  variables en fonction de la coordonnée du chariot 1. Ensuite, il y a l'amortisseur  $c_y$  qui vient simuler le frottement du chariot 2 sur le socle de masse M, et enfin, nous avons modélisé la liaison entre le socle et le sol par les coefficients  $c_s$  et  $k_s$  pour la même raison que ce qui a été indiqué pour le modèle selon l'axe x.

Si nous appliquons la deuxième loi de Newton sur chacune des trois masses nous obtenons :

Pour la masse m1

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1(x)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x)(x_1 - x_2)$$

Équation 8

Pour la masse m2

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_y - c_1(x)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1(x)(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \quad \text{Équation 9}$$

Pour la masse M

$$M \ddot{x}_3 = -c_s \dot{x}_3 - k_s x_3 - c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad \text{Équation 10}$$

Où :

- $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont les mêmes variables qu'au paragraphe 3.1.1.
- $F_y$  est la force appliquée par le moteur de l'axe y sur  $m_2$

Puis, en passant ces trois équations dans Laplace, nous obtenons :

$$x_1 = \frac{c_1(x)s + k_1(x)}{m_1 s^2 + c_1(x)s + k_1(x)} x_2 \quad \text{Équation 11}$$

$$x_2 [m_2 s^2 + (c_1(x) + c)s + k_1(x)] = F_y + [c_1(x)s + k_1(x)]x_1 + c s x_3 \quad \text{Équation 12}$$

$$x_3 = \frac{c s}{M s^2 + (c_s + c)s + k_s} x_2 \quad \text{Équation 13}$$

Ainsi, en substituant les équations 11 et 13 dans l'équation 12, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{x_2}{F_y} = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s} \quad \text{Équation 14}$$

Où

- $b_4 = m_1 M$
- $b_3 = m_1(c_s + c) + M c_1(x)$
- $b_2 = m_1 k_s + M k_1(x) + c_1(x)(c_s + c)$
- $b_1 = c_1(x) k_s + k_1(x)(c_s + c)$
- $b_0 = k_1(x) k_s$
- $a_6 = m_1 m_2 M$
- $a_5 = m_2 [m_1(c_s + c) + M c_1(x)] + m_1 M (c_1(x) + c)$
- $a_4 = m_2 [m_1 k_s + M k_1(x) + c_1(x)(c_s + c)] + m_1 c_1(x)(c_s + c) + c(m_1 c_s + M c_1(x))$
- $a_3 = m_2 [c_1(x) k_s + k_1(x)(c_s + c)] + m_1 k_1(x)(c_s + c) + k_s m_1 c_1(x) + c(m_1 k_s + M k_1(x) + c_s c_1(x))$
- $a_2 = m_2 k_s k_1(x) + c(c_1(x) k_s + c_s k_1(x)) + m_1 k_s k_1(x)$
- $a_1 = c k_s k_1(x)$



Nous obtenons ainsi à l'aide de Matlab le diagramme de Bode suivant:

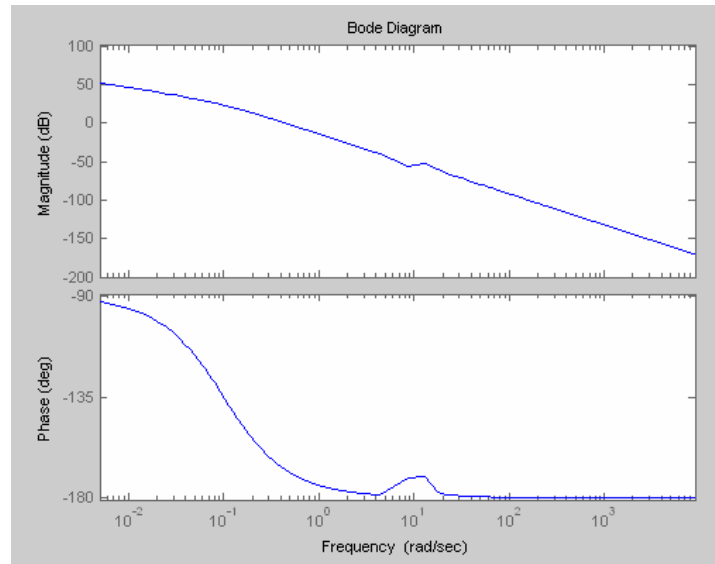


Figure 5

Ce résultat a été obtenu avec une estimation approximative des coefficients comme suit, uniquement dans le but de connaître l'allure de la réponse fréquentielle:

```
M=10;
m1=1;
m2=4;
cy=0.5;
cx=0.2;
cs=1000000000000000;
ks=1000000000000000;
c1(x)=1;
k1(x)=100;
c2=1000;
k2=100;
```

Nous pouvons donc voir que l'allure générale du diagramme en amplitude est assez similaire à celle de l'axe x.

## 4 Identification non paramétrique

### 4.1 Génération du signal d'excitation

Nous allons maintenant passer à la partie pratique. Etant donné, que nous avons pu établir la forme de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel, nous pouvons maintenant le faire de manière pratique dans le but de confirmer le travail qui a été fait ci-dessus. Pour cela, il s'agit de générer un signal d'excitation ayant un contenu fréquentiel assez riche dans la bande de fréquences à considérer. Dans notre cas, la fréquence d'échantillonnage est de 18

[kHz], ce qui signifie, d'après le théorème de Shannon, que nous pourrions identifier notre système dans la plage de fréquences allant de 0 à 9 [kHz]. Nous devons donc commencer par générer un signal d'excitation dont le contenu fréquentiel est précisément celui-ci. En général, un signal d'excitation sbpa est utilisé, mais il présente un désagrément. Avec un tel signal, nous sommes contraints d'appliquer au système un signal d'excitation ayant la même amplitude dans toutes les fréquences. Etant donné que la bande de fréquences à étudier est relativement large, le système va saturer beaucoup plus vite dans les hautes fréquences. Nous avons donc besoin d'un signal dont l'amplitude est modulable en fonction de la fréquence. Pour cette raison, le signal d'excitation sera en définitif une somme de sinus avec une amplitude modulable dans une certaine tranche de fréquences définies. Le choix qui a été de le partager en sept parties, où chacun va contenir une partie du contenu fréquentiel voulu et une amplitude appropriée. Les séparations fréquentielles se sont faites de la sorte :

1. Signal de fréquences variant de 0 à 125 Hz
2. Signal de fréquences variant de 125 à 250 Hz
3. Signal de fréquences variant de 250 à 500 Hz
4. Signal de fréquences variant de 500 à 1125 Hz
5. Signal de fréquences variant de 1125 à 2250 Hz
6. Signal de fréquences variant de 2250 à 4500 Hz
7. Signal de fréquences variant de 4500 à 9000 Hz

En procédant ainsi, et en additionnant ces sept signaux, voici ce que Matlab nous donne dans le domaine temporel (c.f. annexe1 le fichier ".m" de génération du signal)

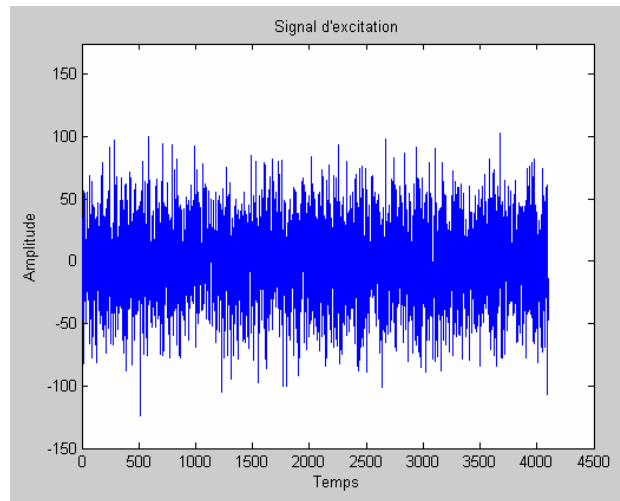


Figure 6 : réponse temporelle du signal d'excitation

Nous pouvons remarquer que ce signal est proche d'un bruit blanc, ce qui est le but recherché. Pour s'en assurer, nous pouvons faire son analyse fréquentielle et la tracer sur un diagramme de Bode comme ci-dessous :

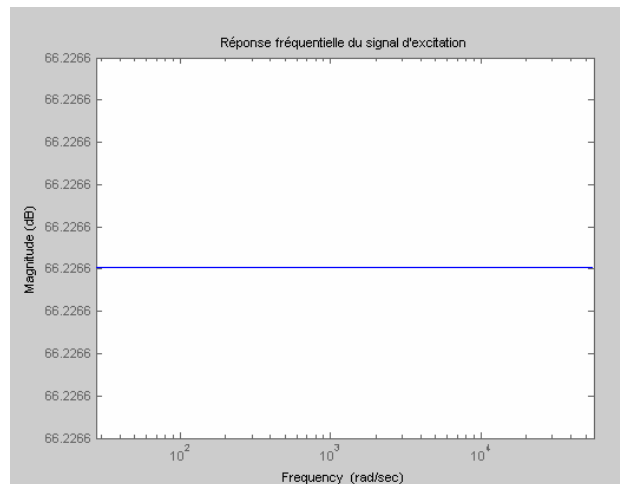


Figure 7 : réponse fréquentielle du signal d'excitation

Nous pouvons donc remarquer en figure 7 que le signal d'excitation a bien les caractéristiques d'un bruit blanc. Il ne nous reste donc plus qu'à moduler les amplitudes des sept signaux considérés et ainsi nous exciterons la tranche fréquentielle avec l'amplitude désirée, comme ci-dessous.

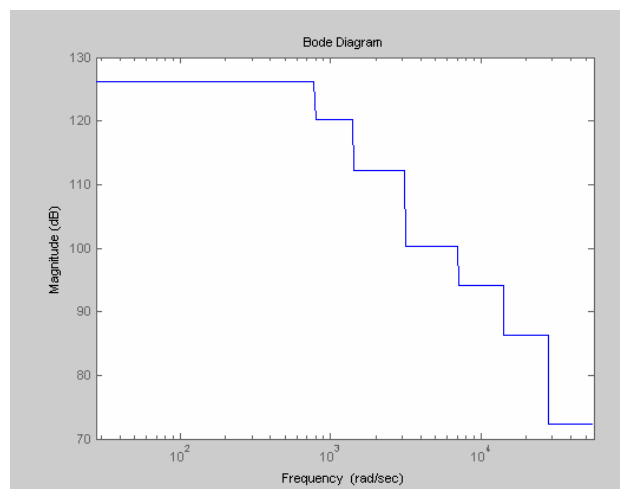


Figure 8 : réponse fréquentielle du signal d'excitation, avec modulation de l'amplitude

## 4.2 Méthode fréquentielle

Une fois que nous aurons collecté les informations liées à l'identification, c'est-à-dire la force exercée (entrée) et la position sur le chariot considéré (sortie), nous utiliserons la méthode de l'analyse spectrale. La théorie liée à cette procédure est expliquée en détail dans le polycopié "Identification et commande II". Pour des informations plus détaillées, le fichier analyse\_spectrale.m est à disposition dans le cd rom annexe. Dans ce fichier, nous pouvons voir que l'analyse spectrale a été séparée en sept analyses spectrales distinctes, correspondant aux sept signaux d'excitation mentionnés à la page précédente. Pour avoir l'allure de la réponse fréquentielle nous devons donc réunir dans un même diagramme de Bode le résultat des sept analyses spectrales.

### 4.3 Résultats obtenus

#### 4.3.1 Système à identifier non-fixé

Ce système de positionnement peut couvrir un déplacement sur un carré de 32 centimètres de côté. Dans un premier temps, l'identification se fera sur le sol, sur neuf points espacés comme ci-dessous :

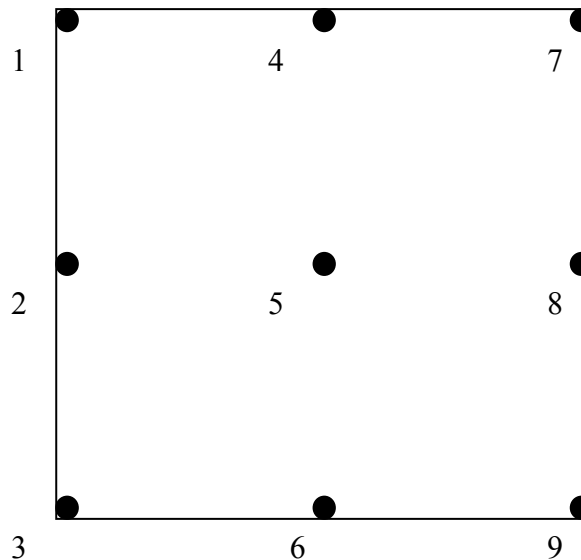


Figure 9 : lieux de la première identification

Le carré en figure 9 correspond à la surface que peut couvrir notre chariot, il mesure donc 32 centimètres de côté. Si les résultats de l'identification sont satisfaisants, nous pourrions procéder à une identification plus fine. Nous pouvons voir ci-dessous les neuf réponses fréquentielles de l'identification à l'aide l'analyse spectrale:

Excitation sur l'axe x :

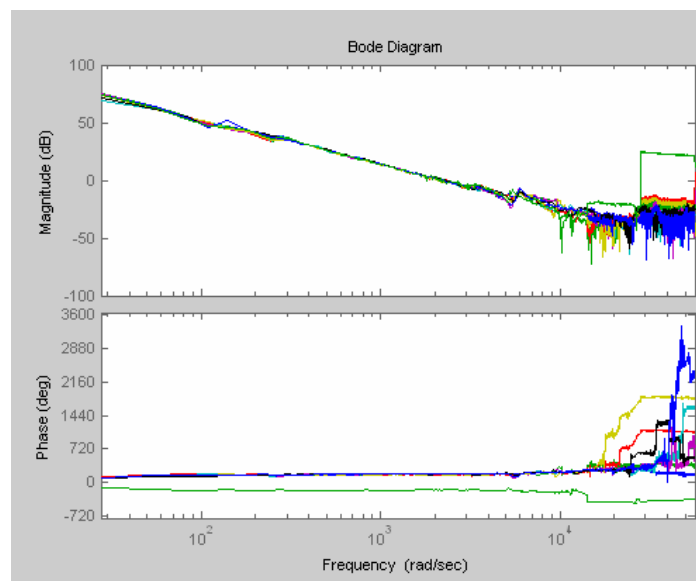


Figure 10

Nous pouvons voir des résonances de faible amplitude entre 138 et 304 [rad/sec] et des résonances très marquées à environ 6100 [rad/sec].

Excitation sur l'axe y :

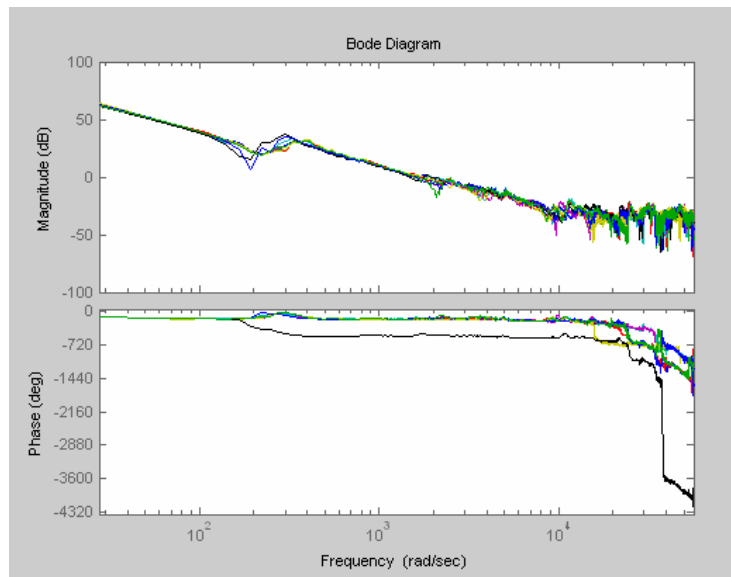


Figure 11

Là également, nous pouvons voir des résonances de faible amplitude vers 304 [rad/sec] et des résonances très marquées un peu plus loin vers 11000 [rad/sec].

Le premier commentaire positif que nous pouvons faire est que les résultats obtenus par les mesures sont similaires à ceux obtenus par le modèle de connaissance (figures 3 et 5). Par exemple, les pentes sont les mêmes (-20 [dB/décade]). Par contre, nous pouvons voir que dans la pratique nous avons une résonance de plus que dans le modèle de connaissance. Celle-ci peut être liée au fait que notre système était simplement posé sur le sol (légèrement bancal) ou alors à une modélisation mécanique trop simplifiée. Il serait donc intéressant de pouvoir comparer ces résultats avec d'autres mesures dans des conditions où le système serait figé sur une table. De cette manière, nous pourrions voir si cette deuxième résonance est réellement intrinsèque à notre système. Cette étape a évidemment constitué l'étape suivante du travail.

#### 4.3.2 Système à identifier fixé sur une table

Le lieu des points de l'identification est le même que celui mentionné en figure 9. Les résultats sont les suivants :

Excitation sur l'axe x :

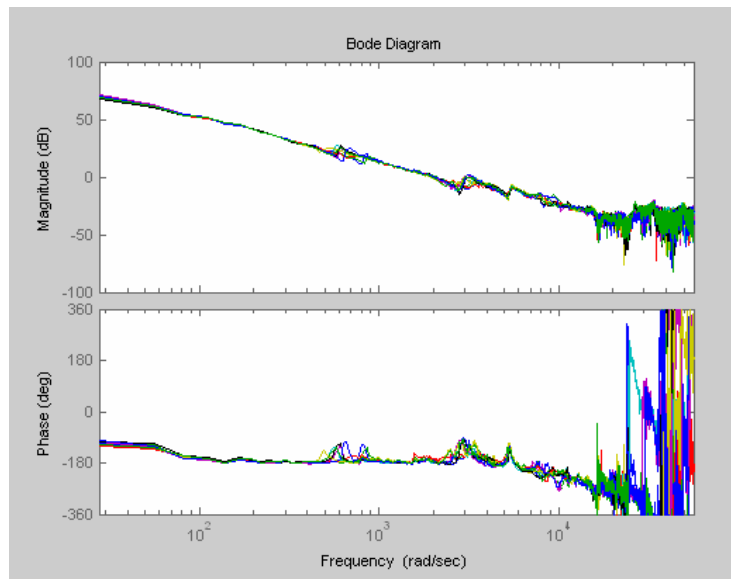


Figure 12

Excitation sur l'axe y :

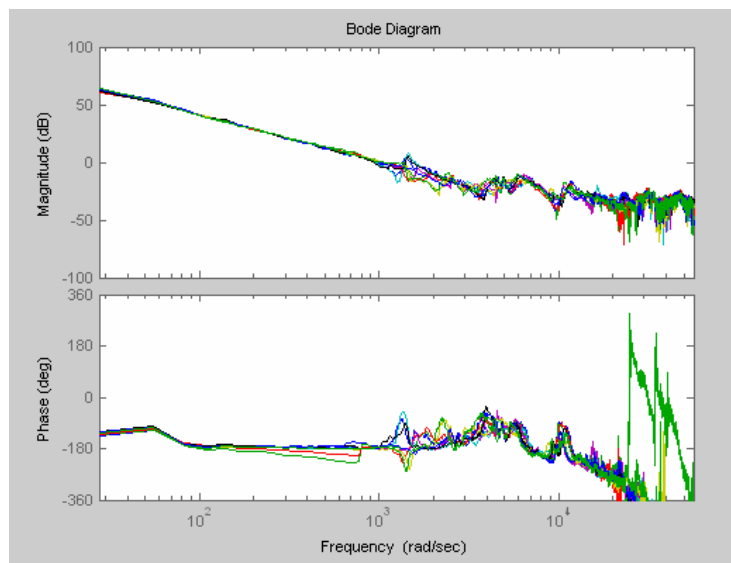


Figure 13

Nous pouvons donc remarquer que les résultats sont très différents par rapport aux mesures précédentes, les résonnances sont maintenant à des fréquences bien plus élevées, mais nous avons toutefois plusieurs résonnances dans notre système. Cela nous permet de confirmer que le modèle de connaissance n'est pas complet. Nous allons tout de même continuer notre travail, et nous pourrons par la suite déterminer si le modèle de connaissance est satisfaisant, en gardant les résultats de mesure fixés sur table.

#### 4.4 Evaluation des paramètres

La suite du travail consiste à déterminer la valeur des coefficients des équations 7 et 14. Pour cela, nous utiliserons la méthode de Lévy, décrite aux pages 91 à 93 du livre de cours "Identification de systèmes dynamiques" en partant des deux fonctions de transfert  $G(j\omega)$  obtenues à l'aide des deux modèles de connaissance. Cependant, pour ne pas biaiser les résultats, nous utiliserons une matrice de pondération  $W$ , car lorsque  $G(j\omega)$  est multiplié par le dénominateur des équations 7 et 14, ce dernier se comporte comme un filtre passe-haut. Pour éviter cela, la matrice de pondération ressemblera à ceci :

$$W = \begin{bmatrix} \lambda^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Ainsi, le vecteur  $\hat{\theta}$  contenant l'évaluation des paramètres de la fonction de transfert aura l'expression suivante :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W y$$

Pour plus de détails, le fichier de la méthode de Lévy implémenté sur Matlab est disponible sur le cd rom annexe (nom de fichier : Levy\_ordre\_5\_1\_pas\_it.m). Voici ci-dessous une comparaison (dans le domaine fréquentiel) entre les résultats obtenus pour la mesure et la méthode de Lévy (position à l'origine), avec  $\lambda = 0.55$ .

Excitation sur l'axe x :

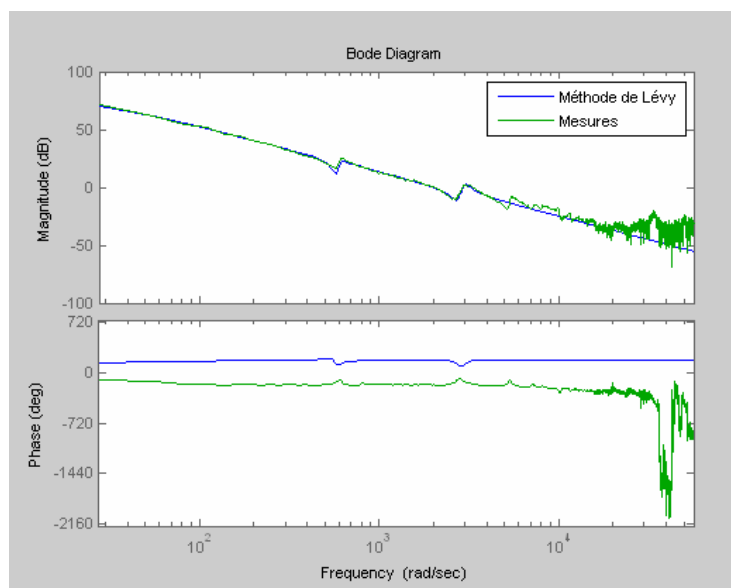


Figure 14

Excitation sur l'axe y :

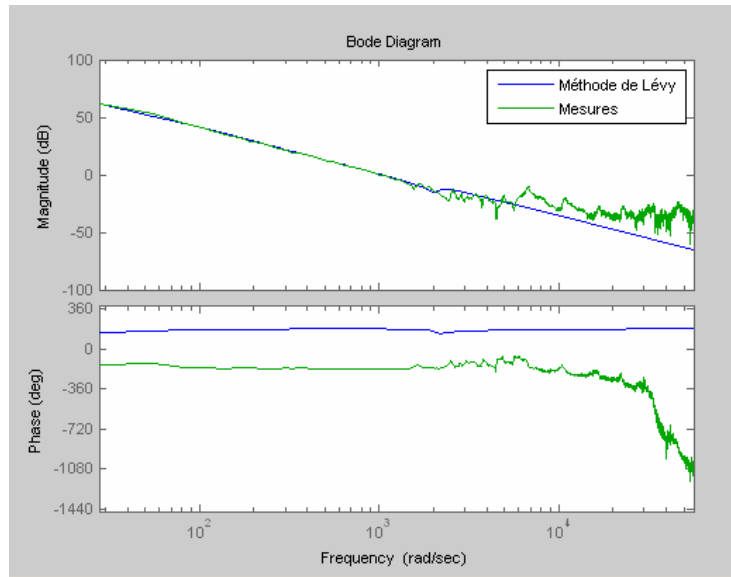


Figure 15

Nous pouvons constater que le modèle en basses fréquences est bien ajusté, mais que dans les hautes fréquences la méthode de Lévy présente encore des problèmes. De plus, nous pouvons constater qu'il y a des résonances qui manquent. Cela est dû d'une part au fait que l'ordre du système n'est pas assez élevé, et d'autre part à cause de la matrice de pondération  $W$  qui compense mal l'effet du filtre passe-haut déjà mentionné ci-dessus. La matrice  $W$  présente un autre inconvénient : le choix de  $\lambda$  affecte beaucoup les résultats. En effet, les résultats de l'excitation selon  $y$  sont bien plus mauvais que ceux selon l'axe  $x$ . Pour remédier à cela nous augmenterons l'ordre des fonctions de transfert des équations 7 et 14 et nous utiliserons une matrice de pondération différente, toujours diagonale, mais qui ajuste ses coefficients en faisant plusieurs itérations avec la méthode de Lévy. Un exemple détaillé illustrant l'utilisation d'une telle matrice de pondération est expliqué dans l'exemple 11.11, page 579 du livre commande numérique de systèmes dynamiques, édition 2006. A titre de comparaison, on peut voir la même identification que ci-dessus sur les figures 16 et 17, avec la nouvelle matrice de pondération itérée 500 fois, et avec une fonction de transfert d'un ordre plus élevé de la forme suivante pour les deux axes:

$$H(s) = \frac{x_i}{F_i} = \frac{b_8 s^8 + b_7 s^7 + b_6 s^6 + b_5 s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 (a_8 s^8 + a_7 s^7 + a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2)}$$

Le paramètre  $a_1$  a été annulé parce que nous pouvons voir que dans les mesures la pente est de -40 [dB/décade] et non de -20 [dB/décade]. Toujours dans le but d'augmenter la précision lors de l'utilisation de la méthode de Lévy, nous réduirons également les mesures hautes fréquences trop bruitées. Nous supprimerons donc les mesures au-delà de 500 [Hz] (donc 3000 [rad/sec]). Voici les résultats obtenus :



Excitation sur l'axe x :

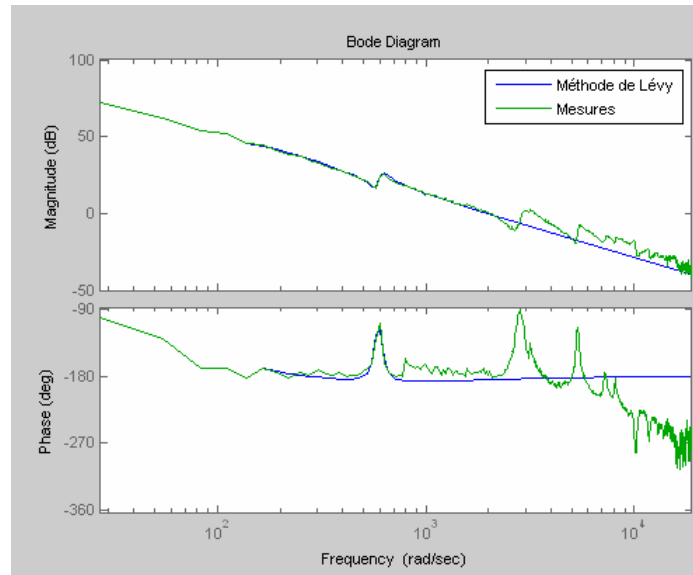


Figure 16

Excitation sur l'axe y :

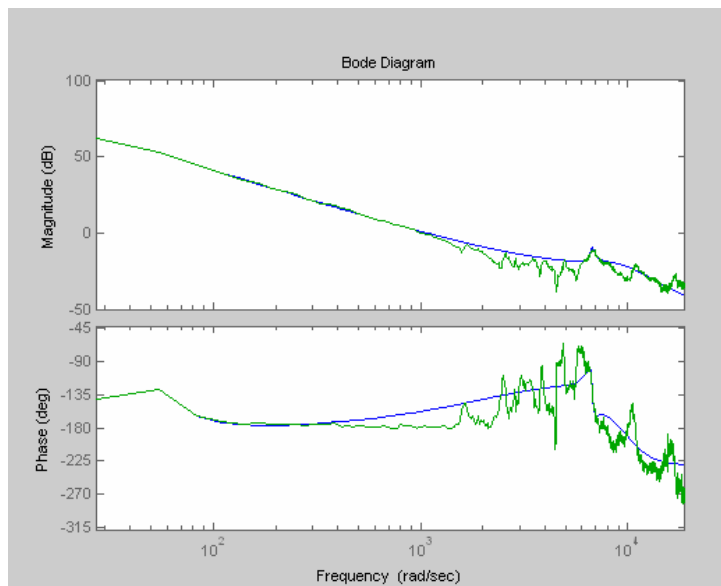


Figure 17

Cette fois-ci, le modèle est meilleur pour l'axe y. Mais les résultats ne sont toujours pas satisfaisants. En augmentant, petit à petit l'ordre de du modèle, il s'est avéré que la fonction de transfert ci-dessous commence à avoir des résultats intéressants.

Équation 15

$$H(s) = \frac{x_i}{F_i} = \frac{b_{16}s^{16} + \dots + b_1s + b_0}{s^2(a_{16}s^{16} + \dots + a_2s^2)}$$

Voici les résultats correspondants (toujours pour l'origine).

Excitation sur l'axe x :

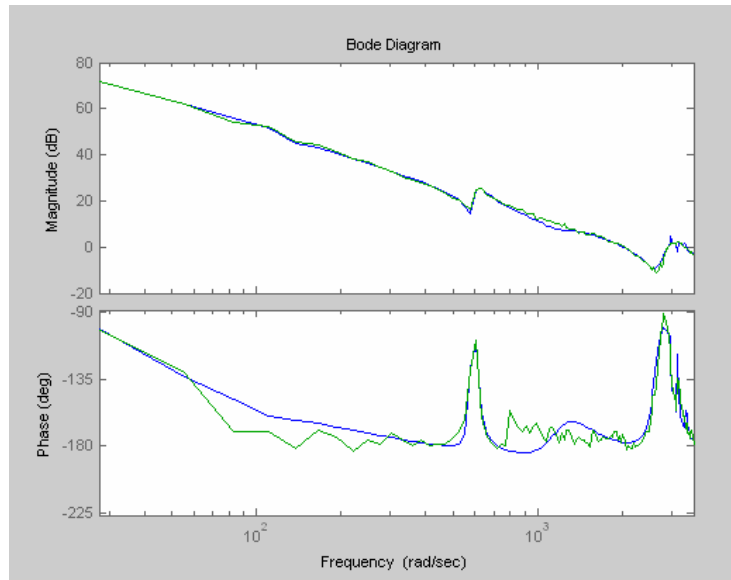


Figure 18

Excitation sur l'axe y :

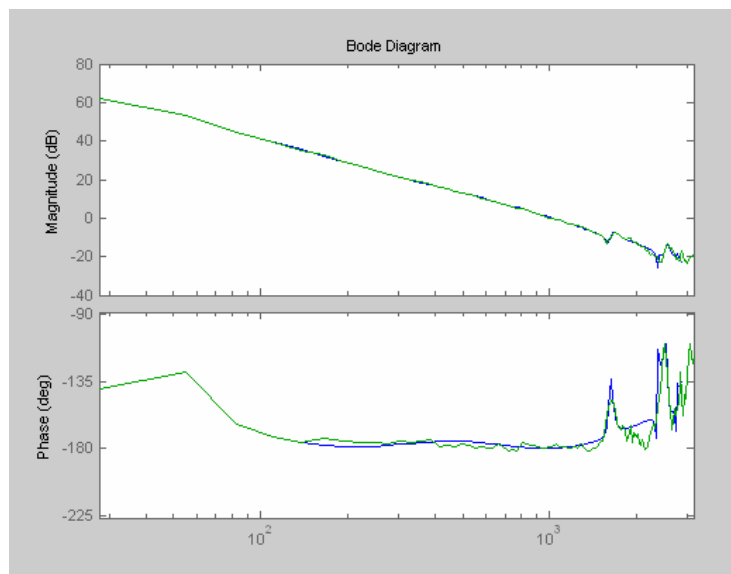


Figure 19

Le résultat est bien meilleur, ce qui permet d'affirmer que c'est le choix sur lequel nous allons rester. Notre fonction de transfert est donc de la forme de l'équation 15, rappelée ci dessous.

$$H(s) = \frac{x_i}{F_i} = \frac{b_{16}s^{16} + \dots + b_1s + b_0}{s^2(a_{16}s^{16} + \dots + a_2s^2)}$$

Maintenant que nous savons précisément de quelle manière nous allons identifier les coefficients de la fonction de transfert choisie, nous pouvons refaire une identification plus fine sur les deux axes. Notre choix s'est porté sur une identification tous les deux centimètres ce qui nous donne 289 points à identifier pour chaque axe d'excitation.

#### 4.5 Visualisation des résultats obtenus

Pour mieux pouvoir mettre en lumière une dépendance de la fonction de transfert en fonction de la position, nous pouvons visualiser les diagrammes de Bode en trois dimensions. Par exemple, si nous fixons un axe et faisons varier l'autre sur plusieurs positions (tous les deux centimètres), comme explicité ci-dessous.

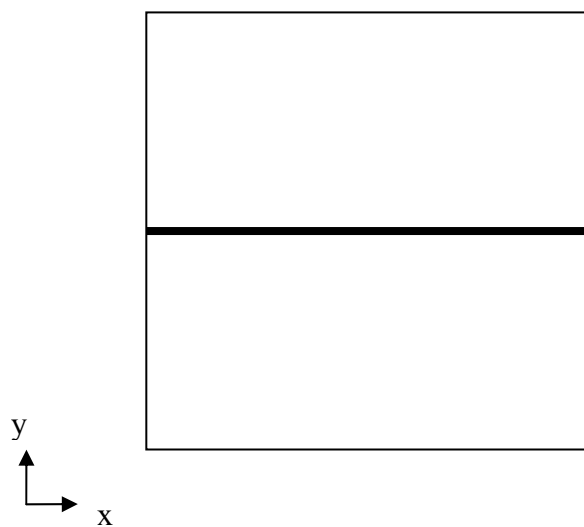


Figure 20

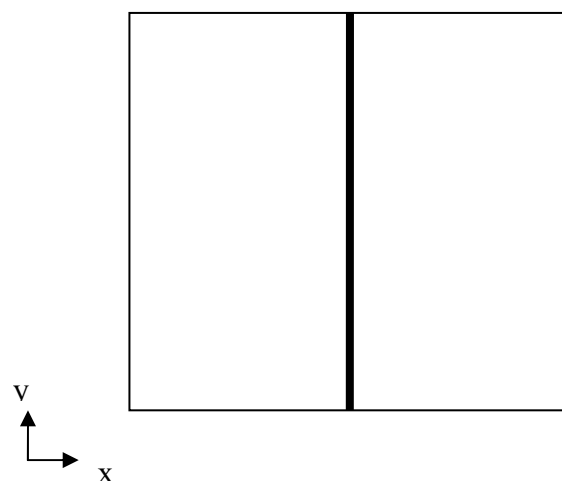


Figure 21

La figure 20 nous montre que le lieu des identifications est figé sur l'axe des y ( $y=0$ ), et varie selon x, tandis que sur la figure 21, c'est le contraire. Voici ce que nous obtenons :

Excitation selon l'axe x avec l'axe y figé :

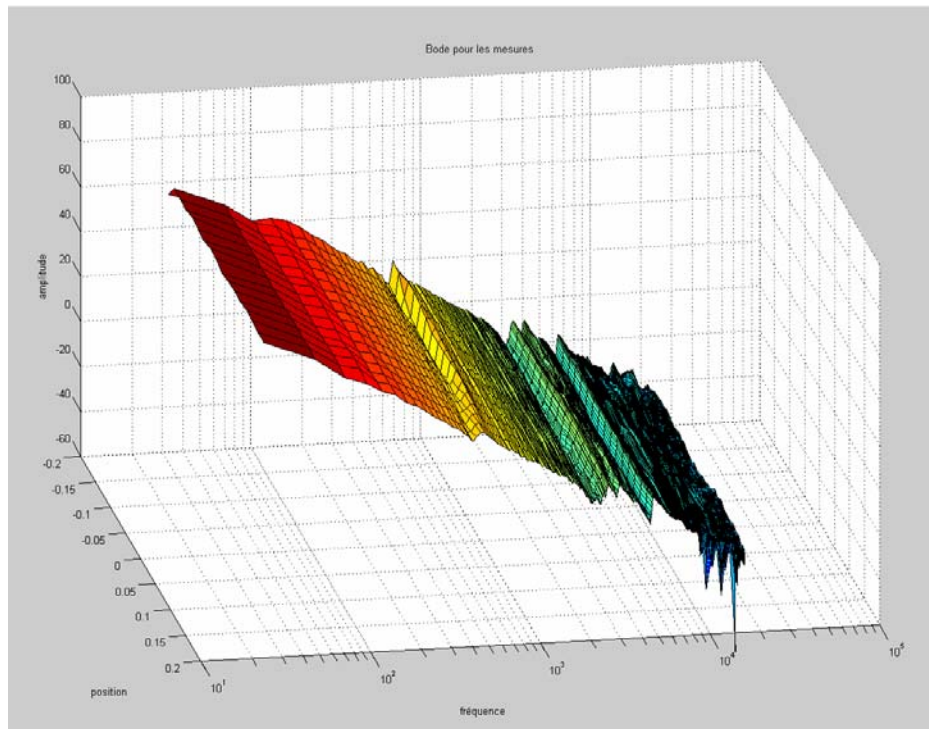


Figure 22

Excitation selon l'axe x avec l'axe x figé :

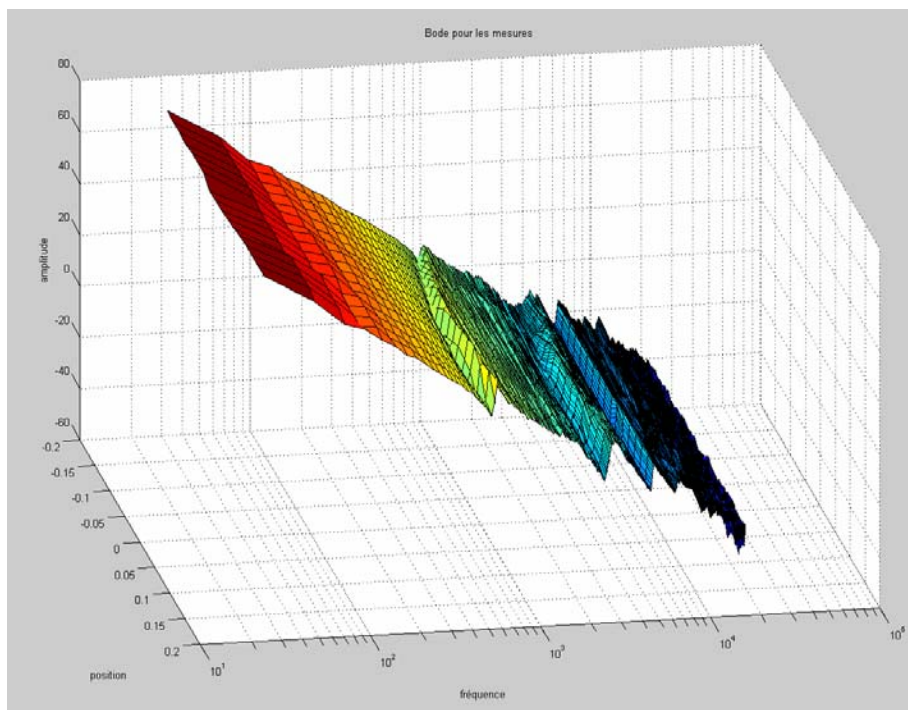


Figure 23

Excitation selon l'axe y avec l'axe y figé :

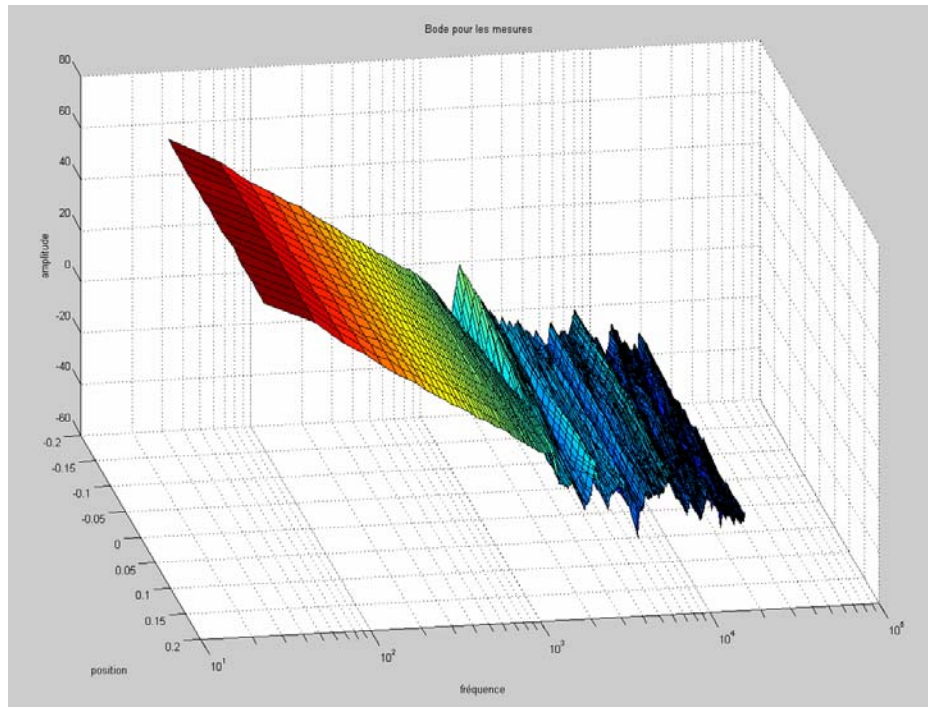


Figure 24

Excitation selon l'axe y avec l'axe x figé :

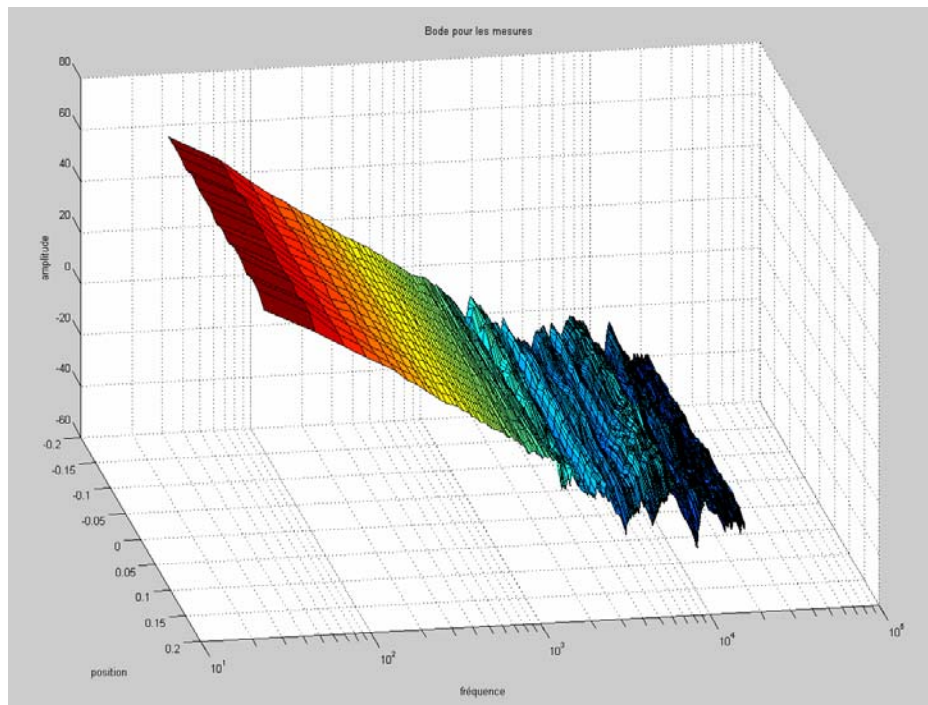


Figure 25

En voyant les quatre figures ci-dessus, nous pouvons facilement constater que nos deux fonctions de transfert (modèle selon x et modèle selon y) sont bel et bien dépendantes de la position. Les fichiers diagrammes\_de\_bode\_3D.m et diagrammes\_de\_bode\_3D\_transverse.m,

disponibles dans le cd rom permettent d'afficher tous les diagrammes de Bode possibles. `diagrammes_de_bode_3D.m` permet également de visualiser les diagrammes de Bode correspondants à la méthode de Lévy ainsi que l'erreur en [dB] que celle-ci entraîne. Sur les figures 26 et 27, nous pouvons voir les erreurs de la méthode de Lévy générées sur les mesures des figures 22 et 24 respectivement

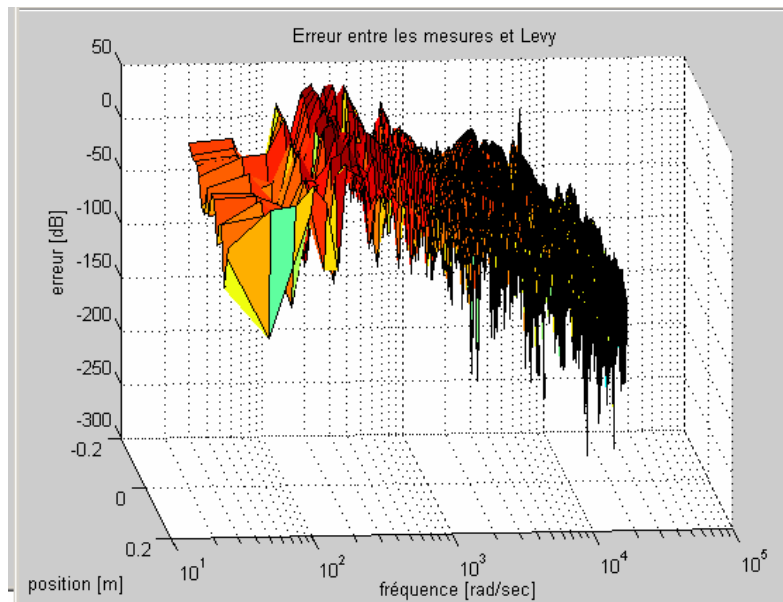


Figure 26.

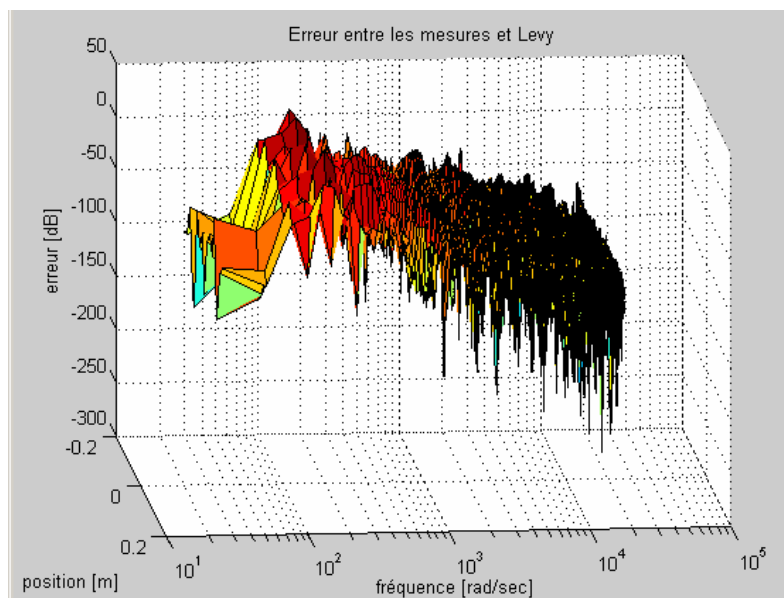


Figure 27

Nous constatons que cette erreur est pour la plupart des cas inférieure à 0 [dB], et n'excède jamais de façon significative cette valeur. Les figures 26 et 27 nous permettent d'affirmer que la méthode de Lévy utilisée est suffisamment bonne pour pouvoir continuer notre travail sur la base de ses résultats.

## 5 Expression des coefficients

### 5.1 Première méthode

Nous approchons maintenant du but final, qui est d'exprimer les coefficients  $b_i$  et  $a_i$  de l'équation 15, à l'aide d'une fonction à deux variables qui dépend des positions  $x$  et  $y$ . Cette fonction doit prendre la forme d'un polynôme pour des raisons d'implémentation du futur régulateur. Il serait utile dans un premier temps de représenter ces coefficients en fonction des positions  $x$  et  $y$ , dans le but de connaître l'allure de ces derniers et d'estimer l'ordre du polynôme en question. Dans la figure ci-dessous nous pouvons voir cette représentation pour les coefficients  $a_1$  de la fonction de transfert obtenue avec l'excitation selon l'axe  $x$ . Pour visualiser l'ensemble des coefficients, les fonctions `affichage_coefficients_x.m` et `affichage_coefficients_y.m` disponibles sur le cd rom annexe affichent tous les coefficients de nos fonctions de transfert pour l'excitation selon  $x$  et  $y$  respectivement.

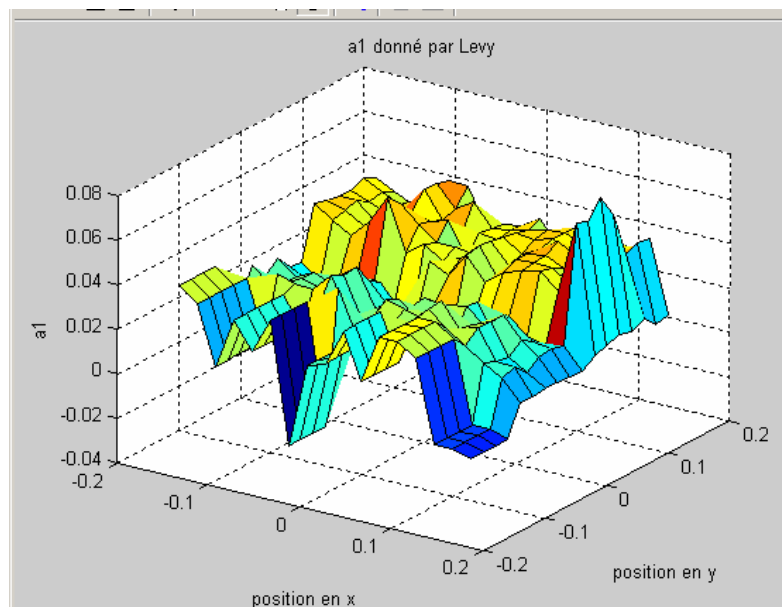


Figure 28

Apparemment, l'expression de  $a_1(x,y)$  est assez chaotique et va être difficile à exprimer avec un polynôme. La fonction `interpolation.m`, disponible également sur le cd rom, cherche les coefficients  $c_1$  à  $c_{21}$  optimaux pour une fonction de la forme :

$$f(x, y) = a_1x^7 + a_2x^6y + a_3x^5y^2 + a_4x^4y^3 + a_5x^3y^4 + a_6x^2y^5 + a_7xy^6 + a_8y^7 + a_9x^6 + a_{10}x^5a_{11}x^4 + a_{12}x^3 + a_{13}x^2 + a_{14}x + a_{15}y^6 + a_{16}y^5 + a_{17}y^4 + a_{18}y^3 + a_{19}y^2 + a_{20}y + a_{21}$$

*Équation 16*



Et voici ce que nous obtenons :

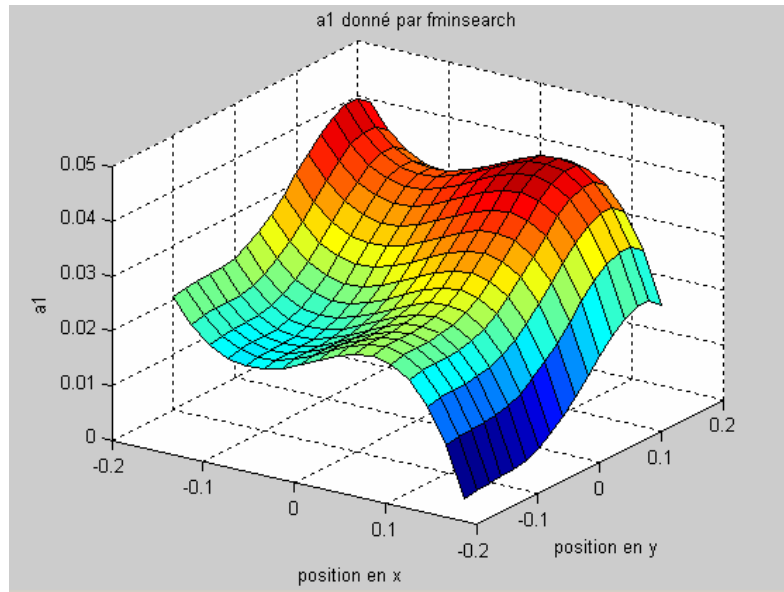


Figure 29

On voit que la fonction ci-dessus exprime très mal nos coefficients  $a_1(x,y)$ . Nous voyons sur la figure 28 que l'erreur entre la valeur réelle des coefficients et la valeur interpolée est du même ordre que les coefficients, ce qui est inacceptable.

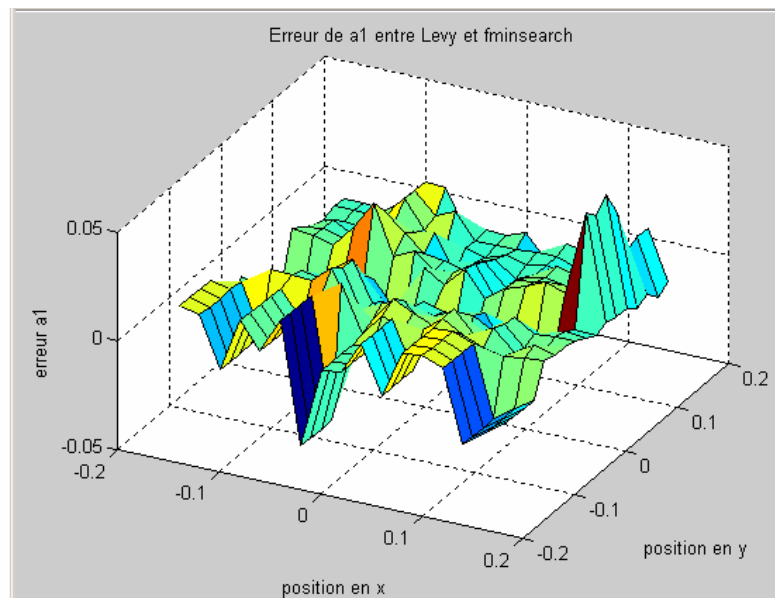


Figure 30

Etant donné que les surfaces exprimant les autres coefficients sont tout aussi complexes, nous en concluons donc qu'il n'est pas possible d'exprimer la valeur des coefficients simultanément en fonction des deux coordonnées  $x$  et  $y$ .



## 5.2 Deuxième méthode

Nous pouvons également établir une fonction de transfert comme ci-dessous :

$$G(s, x, y) = G_0(s) + \varepsilon(s, x, y)$$

Où :

G = Fonction de transfert mesurée

G<sub>0</sub> = Moyenne de toutes des fonctions de transfert sur les 289 points mesurés

ε = Erreur

Avec G<sub>0</sub> de la forme:

$$G_0(s) = \frac{b_{16}s^{16} + \dots + b_1s + b_0}{s^2(a_{16}s^{16} + \dots + a_2s^2)}$$

Nous obtenons les coefficients b<sub>i</sub> et a<sub>i</sub> à l'aide de la méthode de Lévy :

Pour l'excitation selon l'axe x

$a_2$	0.0350670847898917
$a_3$	0.000105994730204388
$a_4$	1.89607332599742e - 006
$a_5$	9.58317973664058e - 010
$a_6$	6.80248941887258e - 012
$a_7$	1.23040969386503e - 015
$a_8$	4.88112750390747e - 018
$a_9$	5.56292246199776e - 022
$a_{10}$	1.3574547317587e - 024
$a_{11}$	1.04192648281435e - 028
$a_{12}$	1.7893664421003e - 031
$a_{13}$	8.40084946783813e - 036
$a_{14}$	1.12942308952644e - 038
$a_{15}$	2.24325018026527e - 043
$a_{16}$	2.75544867735084e - 046
$b_0$	-1.65416400427792e - 051
$b_1$	= -1670238.96636453
$b_2$	144604.383030184
$b_3$	88.1294214633229
$b_4$	7.93281637841321
$b_5$	0.00215776569952197
$b_6$	3.04378484232881e - 005
$b_7$	3.14350951683073e - 009
$b_8$	2.27884231107807e - 011
$b_9$	1.43123502485588e - 015
$b_{10}$	6.67386833947054e - 018
$b_{11}$	2.2698995242179e - 022
$b_{12}$	9.30380297106267e - 025
$b_{13}$	8.38661259319023e - 030
$b_{14}$	6.21869517722235e - 032
$b_{15}$	-8.34611834245259e - 037
$b_{16}$	1.60641364397409e - 039
$b_{17}$	-5.41420597375222e - 044

Pour l'excitation selon l'axe y

$a_2$	0.0371489108429342
$a_3$	0.000559908772342678
$a_4$	1.31787664728e - 005
$a_5$	1.15356964044075e - 007
$a_6$	1.79764244498725e - 010
$a_7$	3.41707902561679e - 013
$a_8$	1.77974398382913e - 016
$a_9$	3.02163922148769e - 019
$a_{10}$	5.60141038234647e - 023
$a_{11}$	1.18516394345035e - 025
$a_{12}$	3.75317255293833e - 030
$a_{13}$	2.28675054298582e - 032
$a_{14}$	-7.37920610256619e - 037
$a_{15}$	2.1317233959452e - 039
$a_{16}$	-8.27626032185462e - 044
$b_0$	7.69197889563826e - 047
$b_1$	= -45069.7876911125
$b_2$	48976.3568397204
$b_3$	233.457546057454
$b_4$	14.4320430942417
$b_5$	0.118615300094686
$b_6$	0.000221523155870643
$b_7$	3.61035141724342e - 007
$b_8$	2.66841250927355e - 010
$b_9$	3.27023430192368e - 013
$b_{10}$	1.19639173432855e - 016
$b_{11}$	1.31149101808632e - 019
$b_{12}$	2.35958428427764e - 023
$b_{13}$	2.57549017911716e - 026
$b_{14}$	2.00984839198034e - 030
$b_{15}$	2.42688747728987e - 033
$b_{16}$	5.57944551706507e - 038
$b_{17}$	8.76879242509121e - 041

Nous pouvons ainsi estimer le paramètre  $\varepsilon$  en minimisant l'expression ci-dessous:

$$\min \{ |G(s, x, y) - G_0(s) - \varepsilon(s, x, y)| \}$$

Équation 17

Où  $\varepsilon$  a la même forme que la fonction de transfert (équation 15). Par exemple si on lui donne la forme suivante :

$$\varepsilon = \frac{c_1 [(c_2 x + c_3 y + c_4) s + (c_5 x + c_6 y + c_7)]}{s^2 ((c_8 x + c_9 y + c_{10}) s + 1)}$$

Équation 18

Nous avons ainsi à disposition les dix paramètres  $c_1$  à  $c_{10}$  pour nous approcher le plus possible de la fonction de transfert mesurée. La fonction `fminsearch` sur Matlab nous donne les coefficients suivants :

Pour l'excitation selon l'axe x

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0055859890666024 \\ 0.00475464341614866 \\ -0.00717117484048248 \\ 0.00597111079727667 \\ -0.00174835269550781 \\ -0.00435168645878269 \\ -0.00272599610618897 \\ -0.00080268367642422 \\ 0.000671150821407719 \\ 2.92069580195861e-005 \end{bmatrix}$$

Pour l'excitation selon l'axe y

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000975996942247202 \\ -0.000230944997746645 \\ 0.000232860683688067 \\ 0.000815750087912243 \\ 8.40619803238908e-005 \\ -0.00122179295252637 \\ -0.000282665216633692 \\ -0.000439228614579648 \\ -0.000426760690216862 \\ 4.29255000526915e-005 \end{bmatrix}$$

Ci-dessous, nous pouvons comparer les résultats obtenus avec et sans la correction  $\varepsilon(s, x, y)$ .

Excitation sur l'axe x à l'origine sans  $\varepsilon(s,x,y)$ :

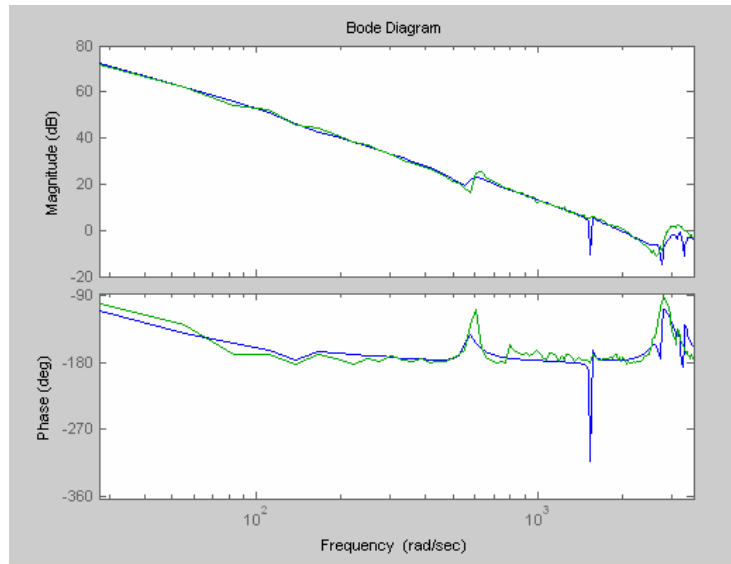


Figure 31 : comparaison entre la fonction de transfert mesurée et celle dépendant des deux axes sans  $\varepsilon(s,x,y)$

Excitation sur l'axe x à l'origine avec  $\varepsilon(s,x,y)$ :

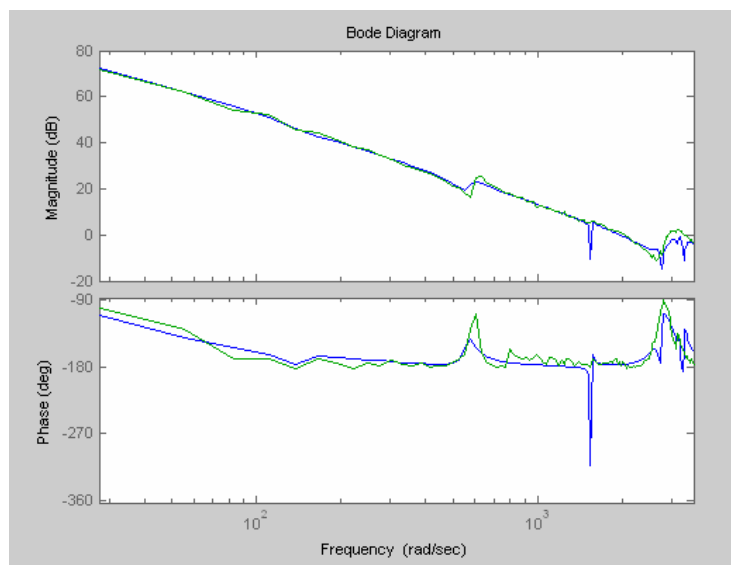


Figure 32: comparaison entre la fonction de transfert mesurée et celle dépendant des deux axes avec  $\varepsilon(s,x,y)$

Le résultat obtenu est assez bon, mais nous pouvons remarquer que notre  $\varepsilon(s,x,y)$  a un effet négligeable sur la figure 32 relativement à la figure 31 (idem pour l'excitation selon l'axe y). Pour avoir une meilleure précision, il faudrait également minimiser l'erreur sur la phase dans l'équation 17 et non seulement le module. Nous pouvons aussi augmenter l'ordre de  $\varepsilon$  dans le but d'avoir un nombre de paramètres supérieur à 10. Malheureusement, cette partie du travail n'a pas été effectuée, car le temps de calcul d'une telle minimisation est très long.

### **5.3 Troisième méthode**

Face à toutes ces difficultés nous avons pu voir qu'il n'est pas aisé d'établir une fonction de transfert de la dynamique du système. Il reste toutefois une dernière solution. Nous avons procédé à une identification tous les deux centimètres de notre système, ce qui nous donne 289 fonctions de transfert pour chaque axe d'excitation. Avec un aussi grand nombre de données, nous pouvons atteindre une très grande précision en dimensionnant un régulateur pour chaque fonction de transfert. Ainsi, à l'aide d'un microcontrôleur, nous pourrions faire appel à la fonction de transfert et au régulateur correspondants à la position du chariot 1 au moment considéré. Cela dit, cette solution présente le désavantage d'exiger l'implantation d'un grand nombre de données.

## **6 Conclusion**

L'objectif que nous nous sommes fixés est donc partiellement atteint. Le problème majeur de ce travail est celui de la minimisation de l'équation 17. Pour ce travail, la résolution de cette dernière s'est faite à l'aide de la fonction `fminsearch` sur Matlab. L'objet du travail à poursuivre serait donc de trouver un meilleur algorithme de minimisation que celui qui a été utilisé, mais également de minimiser la phase. Pour cela, il faut encore normaliser la matrice d'erreur obtenue pour que l'erreur sur le module ne soit pas négligeable relativement à celle de la phase. Cela dit, une solution est tout de même proposée, même si celle-ci n'est pas aussi élégante que ce nous espérons.

## **7 Bibliographie**

- [1] Prof. D. Bonvin, Dr A. Karimi, *Identification de systèmes dynamiques*, 2005.
- [2] Roland Longchamp, *Commande numérique de systèmes dynamiques*, presses polytechniques universitaires romandes, 2005.