

Projet de semestre

# Control and Security of the Hydropter



Arthur Queval  
Master en Microtechnique, semestre 1  
Hiver 2006  
LA - Laboratoire d'Automatique

Professeur : Dominique Bonvin  
Assistant : Sébastien Gros

# Table des matières

<b>1</b>	<b>PRESENTATION DE L'HYDROPTERE .....</b>	<b>3</b>
1.1	INTRODUCTION .....	3
1.2	MODELE PHYSIQUE DE L'HYDROPTERE .....	3
1.2.1	<i>Forces hydrodynamiques</i> .....	3
1.2.2	<i>Modélisation dynamique</i> .....	4
1.3	MODELISATION SOUS MATLAB .....	5
<b>2</b>	<b>ELABORATION D'UNE COMMANDE D'AMERRISSAGE .....</b>	<b>7</b>
2.1	CARACTERISATION DE LA PROCEDURE D'AMERRISSAGE .....	7
2.2	CONFIGURATION D'UNE COMMANDE AUTOMATIQUE.....	7
2.3	REPONSE DU SYSTEME .....	9
2.4	ANALYSE DE LA REPONSE EN Z.....	10
<b>3</b>	<b>ETUDE DU DECOUPLAGE DU SYSTEME.....</b>	<b>13</b>
3.1	DEFINITION DU DECOUPLAGE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE .....	13
3.2	DECOUPLAGE PAR CONTRE-REACTION .....	14
3.2.1	<i>Boucle ouverte (non découplé)</i> .....	14
3.2.2	<i>Système découplé en boucle ouverte</i> .....	14
3.2.3	<i>Système découplé en boucle fermée</i> .....	17
3.3	ANALYSE DE LA FONCTION DE TRANSFERT .....	18
3.4	SIMULATION DU SYSTEME DECOUPLE .....	20
<b>4</b>	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>REFERENCES.....</b>	<b>23</b>

# 1 Présentation de l'Hydroptère

## 1.1 Introduction

L'Hydroptère est un concept de bateau à voile utilisant les lois hydrodynamiques empruntés à l'aéronautique pour « voler » juste au dessus de l'eau. Cette élévation au dessus de l'eau est assurée par des plans porteurs appelés «hydrofoils» produisant une portance grâce à un profil d'aile. Cela permet de supprimer totalement le frottement de la coque avec l'eau permettant ainsi d'atteindre des performances bien supérieures aux bateaux classiques. Ces forces sur les hydrofoils vont contrebalancer la force exercée par le vent sur la voile ce qui confère au bateau une relative stabilité.

L'hydroptère est un système fortement non-linéaire comprenant 4 entrées et 12 variables d'état. Une introduction au modèle dynamique de l'Hydroptère sera exposée dans la première partie. La deuxième partie concernera l'étude d'une procédure d'amerrissage puis enfin dans une troisième partie la possibilité d'un découplage du système sera étudiée.

## 1.2 Modèle physique de l'Hydroptère

### 1.2.1 Forces hydrodynamiques

Le soulèvement de la structure du bateau est assuré principalement grâce aux hydrofoils, ces hydrofoils sont situés sous la coque droite et gauche du trimaran. Ils ont un profil d'aile d'avion ce qui permet de créer une dépression sur le dessus de l'aile, la seule différence réside dans le coefficient du fluide (eau) qui est supérieur à l'air ce qui assure une meilleure portance (Figure 1). On remarque que la force est proportionnelle à la surface immergée ce qui explique que la système est stable lorsque une force s'exerce à la voile : l'hydrofoil situé sous le vent aura une surface immergée supérieure à l'hydrofoil situé au vent et ainsi une force supérieure (1.1). Les variables  $C_d$  et  $C_l$  sont les coefficients de drag et de drift qui sont fonction de l'angle d'attaque des hydrofoils, ce sont sur ces angles d'attaque qu'il est possible de modifier afin de modifier les forces et ainsi effectuer du contrôle sur l'Hydroptère.

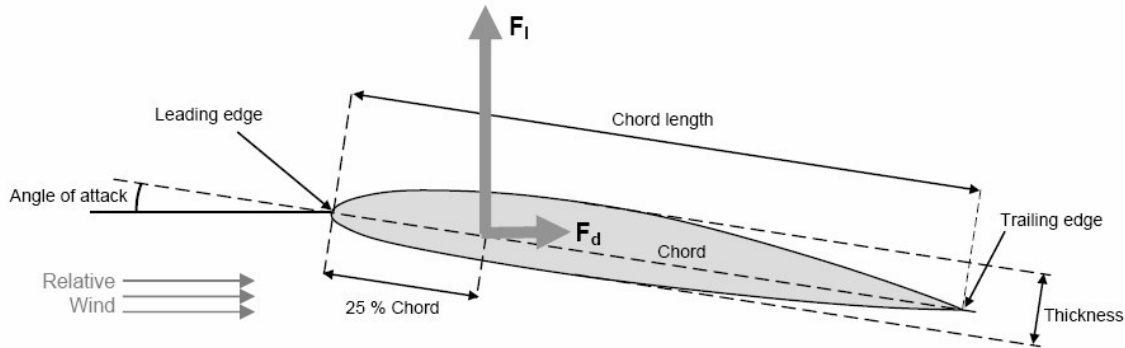


Figure 1 : Forces hydrodynamiques sur les hydrofoils

$$F_l = C_l \frac{\rho}{2} S v^2$$

$$F_d = C_d \frac{\rho}{2} S v^2$$

$$M = C_m \frac{\rho}{2} S v^2 \cdot chord \quad (1.1)$$

with  $\rho$  : Density of fluid  
 $S$  : Wing area  
 $v$  : Flight speed (relative to surrounding fluid)  
 $C_L$  : Lift coefficient  
 $C_D$  : Drag coefficient  
 $C_M$  : Moment coefficient

### 1.2.2 Modélisation dynamique

Le modèle élaboré est basé sur les équations de Lagrange qui permet d'établir les équations du système dynamique à partir de l'énergie du système [3].

Un système dynamique est représenté sous la forme d'équations différentielles ordinaires (EDO), ce qui facilite sa résolution par intégration numérique (1.2).

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$x = [q \quad \dot{q}]^T \quad (1.3)$$

$$q = [x \quad y \quad z \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (1.4)$$

$$u = \begin{bmatrix} \text{right foils} \\ \text{left foils} \\ \text{pitch} \\ \text{yaw} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

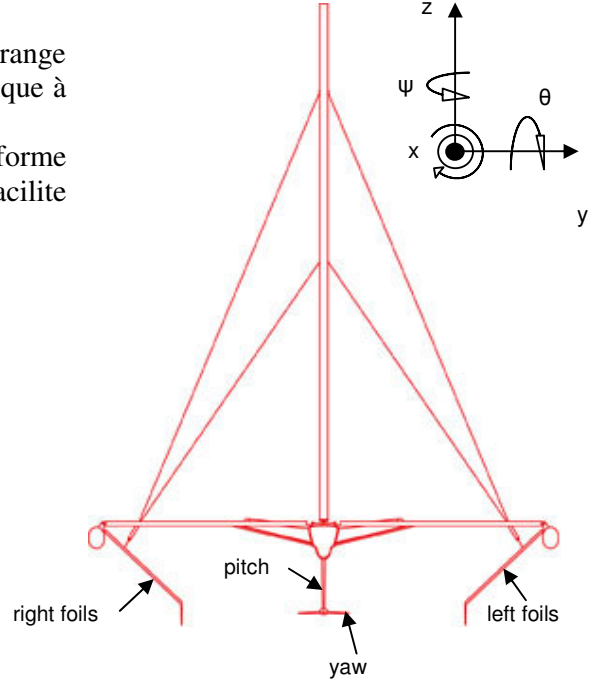


Figure 2: Vue de face de l'Hydroptère

Le vecteur  $x$  est le vecteur d'état du système correspondant à l'énergie contenue dans le système en tout temps.

L'hydroptère est un système comprenant 4 entrées (1.5) et 12 sorties (1.3), les entrées sont les deux hydrofoils, le pitch (lacet) et la yaw (gouverne de profondeur). Le réglage de la voile est fixé par les conditions initiales mais peut être associé à une entrée supplémentaire du système.

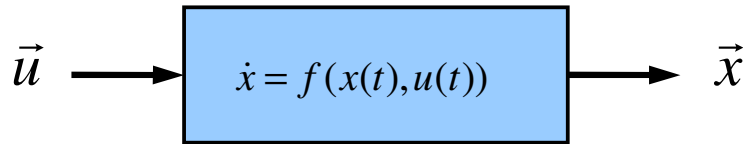


Figure 3: Structure du système dynamique

#### Point de fonctionnement

Le point de fonctionnement du système ou point stationnaire est un état du système pour lequel les conditions passées n'ont pas d'influence sur le système : le système est stable pour autant qu'il se trouve près de ce point. Cela revient à ajuster des paramètres afin d'obtenir  $\dot{x}(t) = 0$ .

Sous forme d'équation cela correspond à annuler l'accélération du système (1.6).

$$0 = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad (1.6)$$

#### Contre-réaction

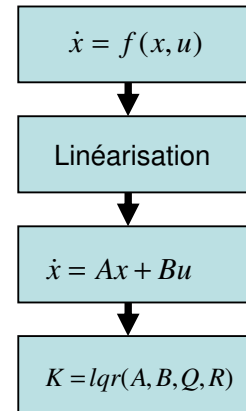
Le point de fonctionnement correspond aux conditions initiales du système.

En raison de la non-linéarité du système, il peut être utile de le représenter sous forme linéaire autour du point du point de fonctionnement (1.7), cette représentation matricielle est une

bonne approximation du système non linéaire pour autant que les écarts par rapport au point fonctionnement soient faibles.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.7)$$

Cette représentation simplifiée du système est utilisée pour le calcul de la matrice de gain  $K$  dans une boucle de contre-réaction. Le gain de la matrice est calculé par LQR (Linear Quadratic Regulator) [1][3] qui minimise l'erreur quadratique entre les sorties et les valeurs de consigne. Les matrices  $Q$  et  $R$  sont, respectivement, les matrices de pondération des sorties et des entrées.



**Figure 4: Evaluation du gain par LQR**

### 1.3 Modélisation sous Matlab

La représentation sous Matlab se subdivise en deux parties distinctives : une partie modélisation et une partie simulation (Tableau 1).

La partie modélisation comprend les définitions des équations de Lagrange du système ainsi que les paramètres géométriques du bateau. Il intègre également les définitions des forces, vitesses et accélérations en fonction des états du système.

La partie simulation calcule le point de fonctionnement du système ce qui correspond au point stationnaire ou point stable via la fonction `fmincon()`. Comme expliqué dans le point 1.2.2, le point stationnaire va permettre de définir les conditions initiales au temps  $t=0$ .

L'intégration du système est effectuée à partir des dérivés du système et les positions sont intégrées à partir des conditions initiales et des vitesses du système. Cette intégration est effectuée par la fonction `ode45()` qui est une fonction de base de la toolbox Matlab pour la résolution d'équation différentielles ordinaire. Cette fonction appelle elle-même la fonction *Hydro\_integ.m* qui calcule les forces puis les vitesses et les accélérations pour pouvoir être intégrer de façon numérique en adaptant automatiquement le pas d'intégration.

## Modélisation du système dynamique de l'Hydroptère

Construction du système dynamique (*Make\_dynamics.m*) :

- Définition des équations de Lagrange pour les 6 états du système.
- Définition de la matrice de passage de la base e à E.
- Définition des vitesses et accélérations dans la base E à partir du Lagrangien du système.

Fichiers M générés :

- Phimat\_comp.m
- Speeds.m
- Acceleration.m

Construction de la géométrie (*Make\_Geometry.m*) :

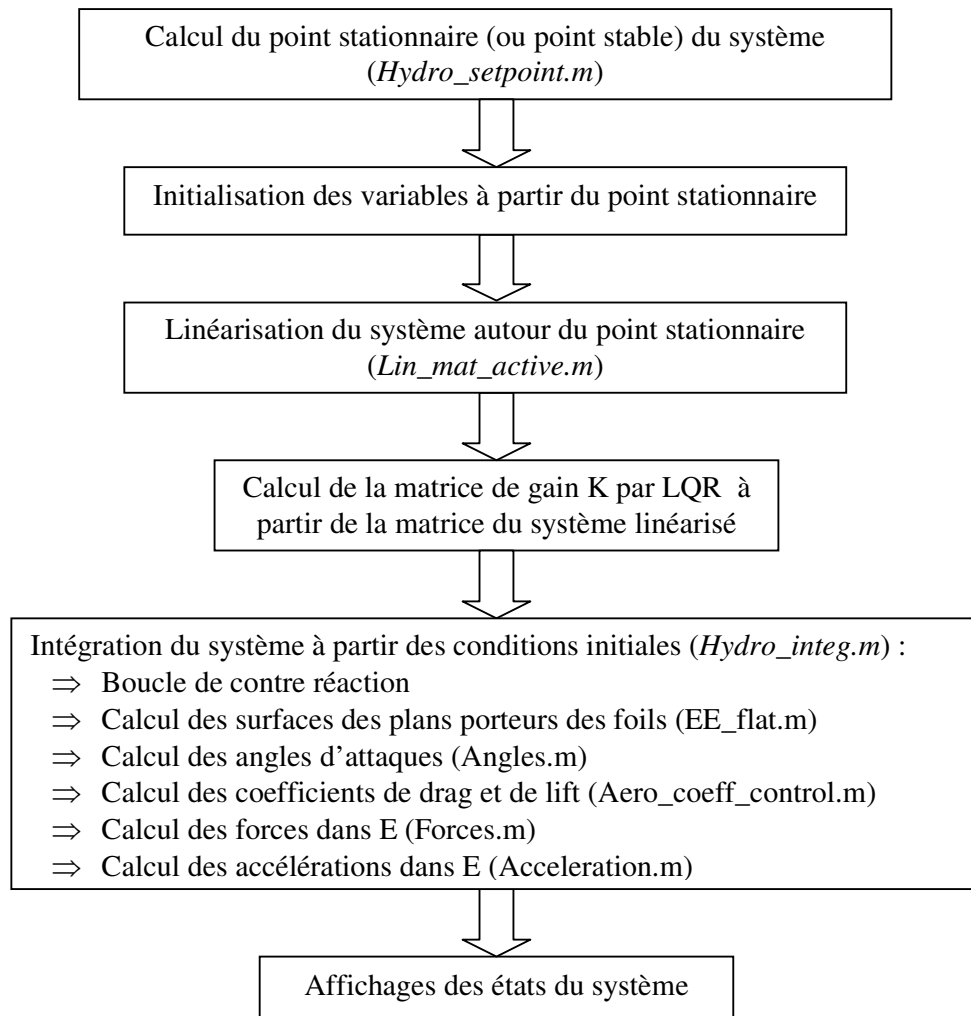
- Définition des forces sur les différentes structures.
- Définition des points d'application des forces.
- Définition des intersections des foils avec la surface de l'eau (Évaluation de la surface portante des foils)
- Définition des forces et moments généralisés dans E.

- GAs.m
- EE\_flat.m
- Forces.m

Définition de la linéarisation de système autour du point stationnaire (*Hydro\_lin\_active.m*)

→ Lin\_mat\_active.m

## Simulation de l'Hydroptère (*main.m*)



## 2 Elaboration d'une commande d'amerrissage

### 2.1 Caractérisation de la procédure d'amerrissage

Une procédure d'amerrissage consisterai à « poser » l'Hydroptère sur l'eau en agissant sur les entrées du système.

Cette procédure d'amerrissage a deux buts :

- ⇒ Contrôler le système jusqu'à ce que la coque du bateau touche l'eau, afin de prévenir d'un risque d'instabilité durant cette phase
- ⇒ Diminuer le choc lors de l'impact de la coque sur l'eau afin d'éviter d'exercer des contraintes trop importantes sur la structure de la coque lors du choc et ainsi la possibilité de créer une structure plus légère afin d'obtenir de meilleures performances.

La première condition nécessite l'élaboration d'une contre réaction en contrôlant par exemple les 3 angles  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  afin d'assurer que le plan créé par les coques reste parallèle à la surface de la mer.

Pour diminuer les contraintes, cela revient à minimiser l'énergie lors de l'impact. L'énergie totale correspond à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (2.1).

$$E_{tot.} = E_{cin.} + E_{pot.} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad (2.1)$$

Etant donné que l'on s'intéresse à minimiser l'énergie à l'impact, donc à hauteur nulle (la surface de l'eau étant prise comme référence), on peut donc supprimer l'énergie potentielle, ce qui revient donc à minimiser l'énergie cinétique.

La masse étant un paramètre fixe (7 tonnes), l'énergie dépend directement de la vitesse au carré. De plus énergie dissipée lors de l'impact est principalement due la vitesse dans la direction  $z$  (2.2).

$$E_{impact} = E_{cin.} = \frac{1}{2}mv^2 \cong \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \quad (2.2)$$

Il faut donc chercher à minimiser la vitesse de descente de l'Hydroptère en  $z$ . Pour cela, il faut chercher une trajectoire continue donc la vitesse et la position en  $z$  tendent vers 0 ( $z=0 \leftrightarrow$  surface de la mer) lorsque que le temps tend vers l'infini.

### 2.2 Configuration d'une commande automatique

Pour stabiliser le système, il serai approprié d'effectuer un contrôle sur les angles mais également sur les vitesses angulaires. En effet, Dans la chaîne dynamique du système, les positions découlent de leurs dérivées par intégration, il n'est donc pas possible de faire un contrôle sur une position sans le faire sur sa dérivée.

Pour remplir la deuxième condition de vitesse et de position nulle a l'infini, il est possible d'utiliser une exponentielle décroissante. Cette fonction a également l'avantage d'avoir une position et sa dérivée de la même forme répondant ainsi aux conditions.

L'exponentielle peut être défini temporellement mais cette méthode ne prend pas en compte l'état initial du système et ne constitue pas une solution flexible.

Une autre solution consiste à exprimer l'exponentielle sous forme de son équation différentielle (2.4). Ainsi, en contrôlant la vitesse en  $dz$ , cela permet de contrôler également indirectement la position en  $z$  par intégration tout en tenant compte de la position actuelle du système ( $z_0$ ).

Cette solution est un avantage du fait qu'elle ne dépend que du seul paramètre  $\alpha$  qui correspond à la pente de l'exponentielle décroissante (Figure 6). Ce paramètre  $\alpha$  doit donc être ajusté afin de minimiser la vitesse à l'impact.

Le gain du régulateur n'est pas calculé sur l'ensemble du système mais uniquement sur les sorties à contrôler spécifiquement. Dans le cas précis de l'amerrissage, il faut imposer un contrôle sur  $dz$  mais également sur les vitesses angulaires afin d'assurer la stabilité lors de la descente (2.3)(2.5). La matrice de gain de la boucle de contre réaction est calculé par LQR à partir des matrices  $A$  et  $B$  réduites du système.

$$\vec{X}_{ref} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad \dot{z} \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ref} &= -\alpha \cdot z \\ z(t) &= z_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \dot{z}_{ref} = -\alpha \cdot z_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t) = -\alpha \cdot z(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\vec{X}_{ref} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{z}_{ref} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -\alpha \cdot z \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.5)$$

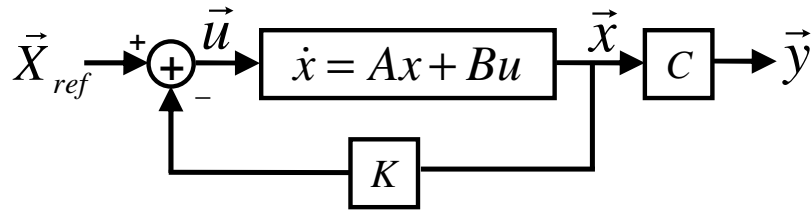


Figure 5: Contrôle par contre-réaction

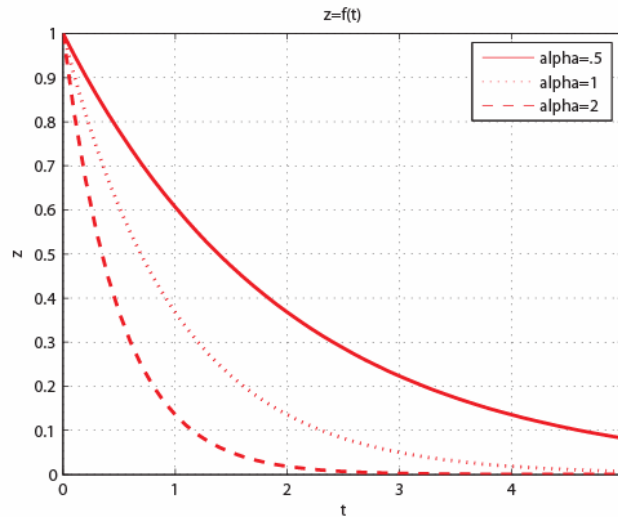


Figure 6 : Forme de la consigne en  $z$  pour différente valeur de  $\alpha$



## 2.3 Réponse du système

Pour la simulation de la procédure d'amerissage, on pose deux conditions :

- ⇒ Le vent est coupé au temps  $t=0$  : aucune force motrice ne s'exerce sur le bateau mis à part les forces sur les hydrofoils et le safran.
- ⇒ Pas de perturbation extérieure : l'amplitude des vagues est nulle (mer plate) ce qui permet une première interprétation des réponses du système dans des conditions idéales.

Ci-dessous, on peut observer l'évolution de tous les états du système pour une simulation de 25 secondes (Figure 7).

Les simulations sont effectuées en boucle ouverte, en boucle fermée avec les 4 entrées (yaw, pitch et hydrofoils) et en boucle fermée avec seulement avec 2 entrées (pitch et yaw).

L'ordonnée zéro est définie comme la surface de l'eau ainsi le moment où la courbe coupe l'axe des abscisses correspond à l'impact de la coque avec l'eau. Tous les points de la courbe situés après l'impact avec la surface de la mer ne sont pas physiquement interprétables et donc négligés. On suppose ainsi que le système est stable lorsque les coques ont touché l'eau.

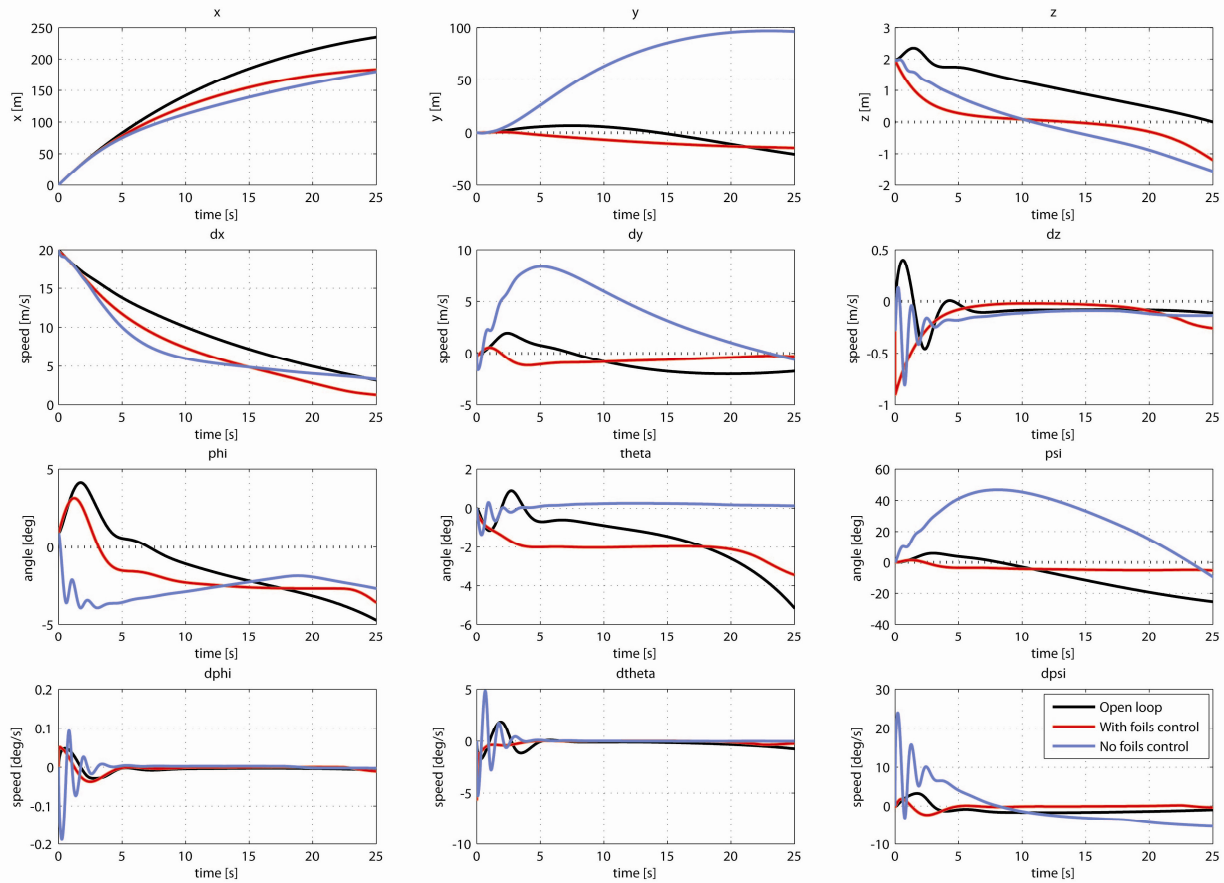


Figure 7: Réponse du système

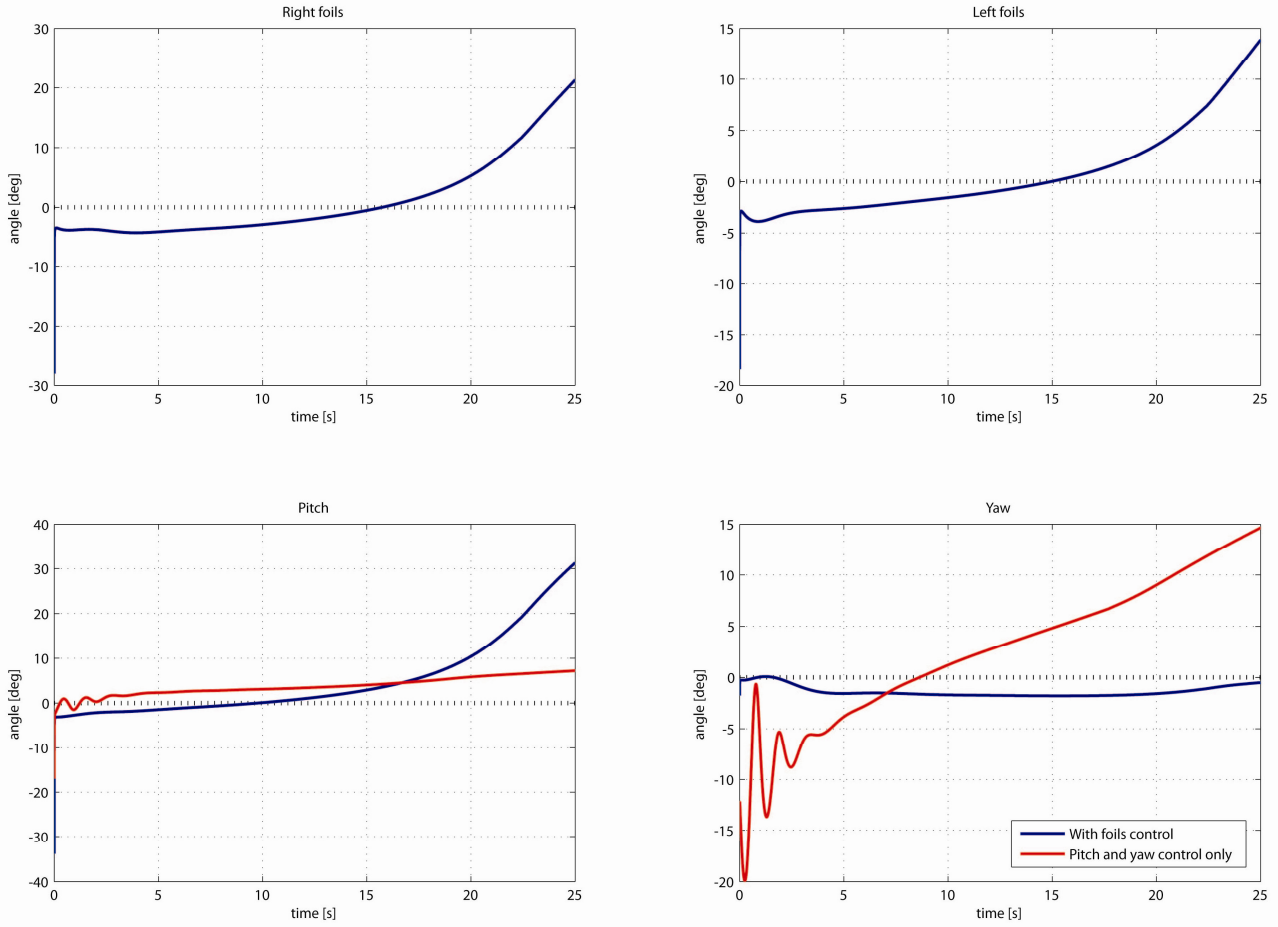


Figure 8: Action sur les entrées

Le graphe de la Figure 8 montre les actions effectuées sur les entrées du système. Le fait que les entrées ne sont pas initialisées à zéro est dû au fait que les entrées sont initialisées par le point de fonctionnement.

## 2.4 Analyse de la réponse en $z$

Cette partie se focalise plus particulièrement sur la réponse en  $z$  et  $dz$  du système permettant d'en déduire la diminution d'énergie dissipée à l'impact avec l'implantation d'une boucle de contre-réaction.

Le graphe  $z(t)$  et  $dz(t)$  (Figure 9) montre que la réponse en boucle fermée avec les 4 entrées (hydrofoils, pitch, yaw) suit correctement la consigne (courbe verte), ce qui n'est pas le cas en agissant sur seulement 2 entrées (pitch, yaw) (courbe bleu) du système et en laissant les hydrofoils en position fixe.

La réponse en boucle ouverte a un temps d'impact supérieur aux deux autres réponses (courbe noire), néanmoins, la vitesse au temps d'impact est supérieure.

Le paramètre  $\alpha$  est ajusté itérativement afin que le vecteur position en  $z$  soit minimal lors de l'impact avec l'eau.

Le graphe représente l'énergie cinétique en  $z$  afin d'évaluer l'énergie dissipée au moment de l'impact (Figure 10).

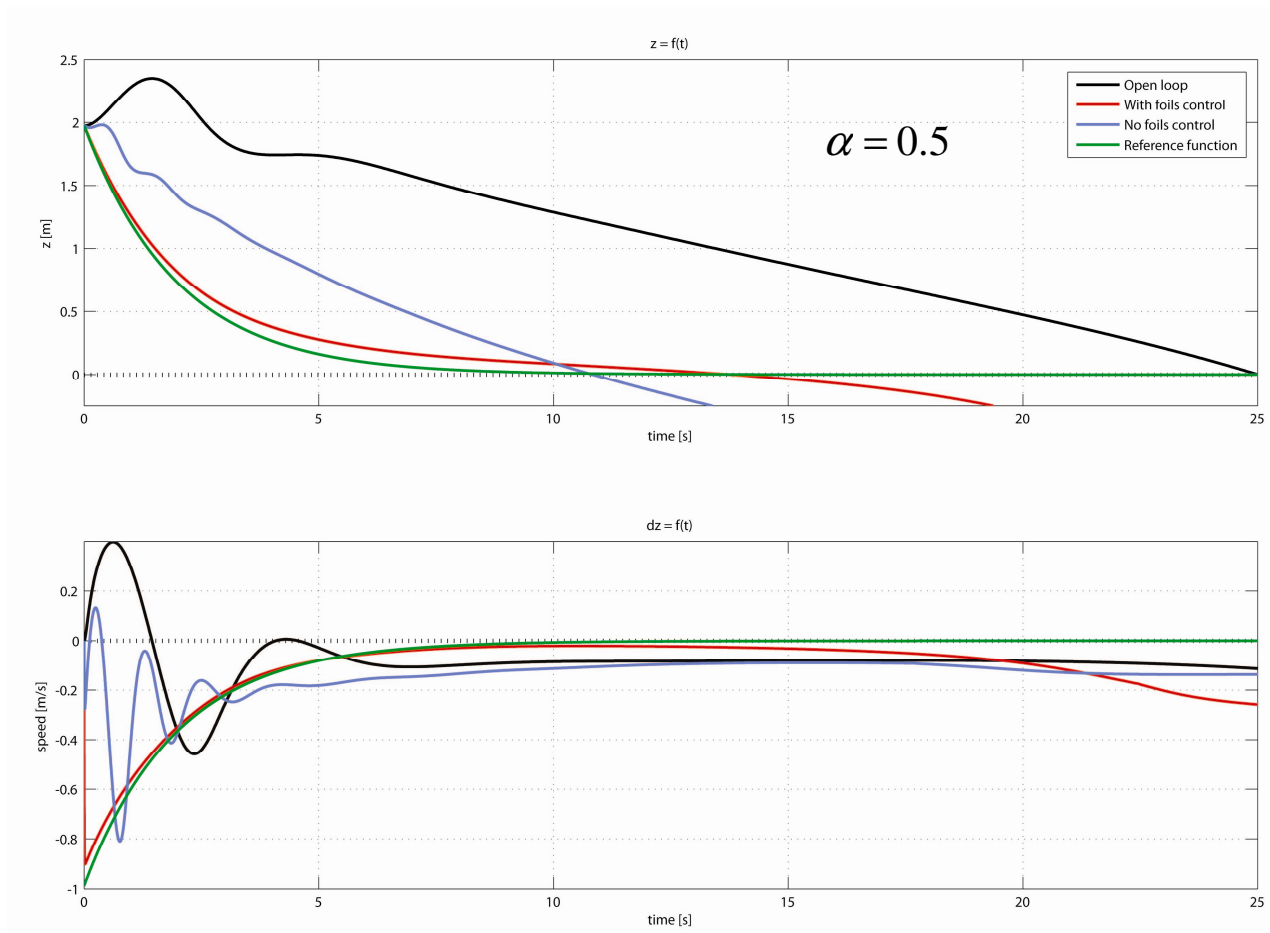


Figure 9: Réponse du système en  $z$  et  $dz$

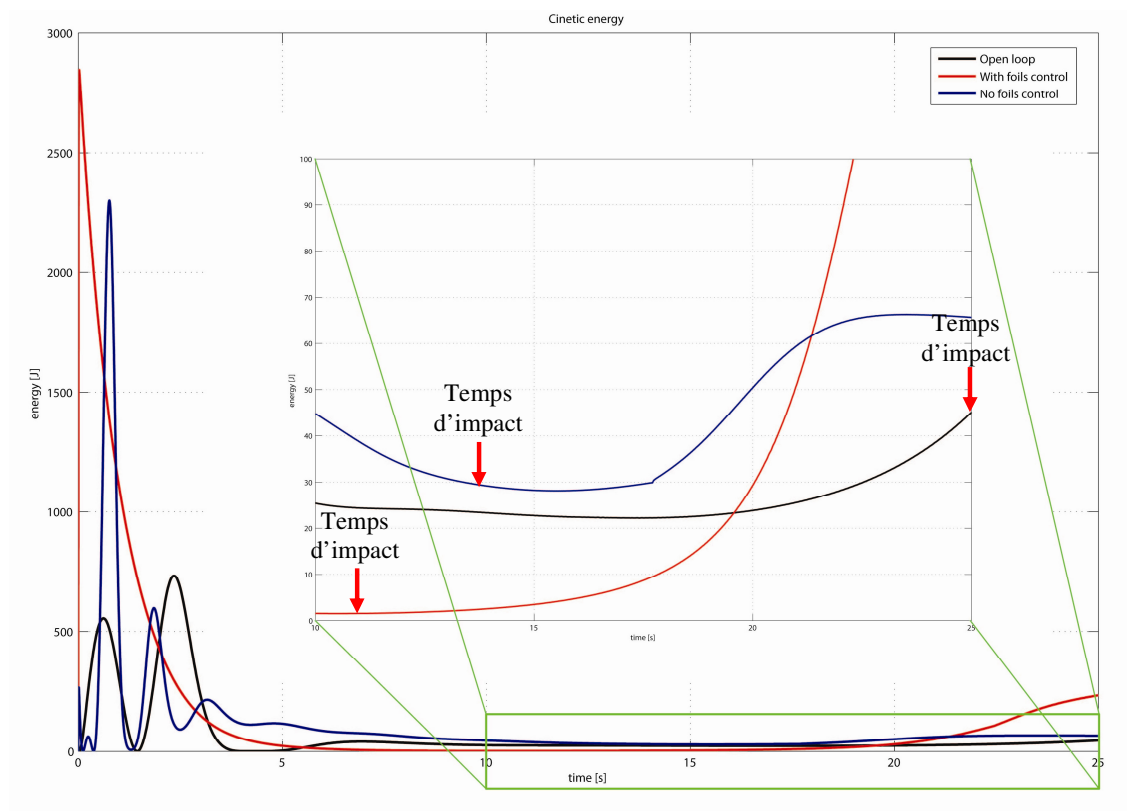


Figure 10: Energie cinétique en  $z$

### Limitations

Il est possible de remarquer que le système « décroche » au bout d'un certain temps : ceci est dû au fait que le système ne peut plus suivre la consigne en  $z$  du fait qu'il ne possède plus suffisamment d'énergie (Figure 11).

Ce point correspond au point d'inflexion de la courbe : c'est le point où la vitesse en  $z$  est minimale. Cela également veut dire que la vitesse va accélérer de nouveau à partir de ce point, il est donc préférable de positionner ce point idéalement à la surface en ajustant le paramètre alpha de la consigne. Une vitesse minimal à l'impact a été atteinte avec un paramètre  $\alpha=0.5$  dans le cas de la Figure 9.

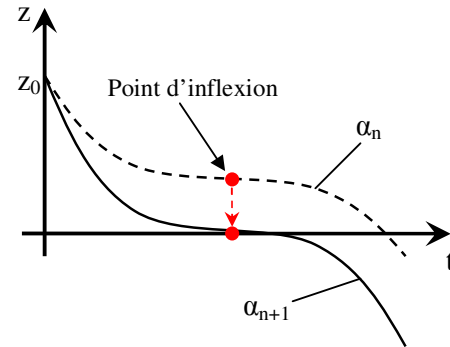


Figure 11: Ajustement du paramètre alpha

### Résultats

A partir du graphe précédent, il est possible de déterminer les temps d'impact, vitesses et énergie cinétique en  $z$  au moment de l'impact. Sur le tableau suivant on peut comparer les temps d'impact, vitesses et énergies à l'impact en fonction des trois simulations effectuées (Tableau 2).

	Open loop	Close loop (foils control)	Close loop (no foils control)
<b>Z Impact time [s]</b>	<b>25.013</b>	<b>13.758</b>	<b>10.825</b>
<b>Z Speed at impact time [m/s]:</b>	<b>0.113</b>	<b>0.026</b>	<b>0.106</b>
<b>Z Kinetic energy at impact time [J]:</b>	<b>45.243</b>	<b>2.441</b>	<b>39.762</b>

Tableau 2 : Energie dissipée à l'impact

On remarque clairement que la vitesse d'impact est diminuée de façon significative avec l'implantation d'une commande automatique sur les 4 entrées (hydrofoils, pitch, yaw). Un contrôle sur seulement 2 entrées (pitch, yaw) ne permet qu'une faible diminution de la vitesse d'impact comparé à un comportement en boucle ouverte.

Le facteur de diminution de l'énergie lors de l'impact entre boucle fermée (4 entrées) et boucle ouverte est presque de 20 (2.6).

$$\frac{E_{c,boucle\ ouverte}}{E_{c,boucle\ fermée}} \cong 18.5 \quad (2.6)$$

Ces résultats impliquent qu'il est possible d'effectuer une procédure d'amerrissage satisfaisante seulement dans le cas d'un contrôle sur les 4 entrées. Cela suppose qu'il est nécessaire d'implanter des actionneurs dans les hydrofoils engendrant ainsi une augmentation des coûts de réalisation.

### 3 Etude du découplage du système

#### 3.1 Définition du découplage d'un système dynamique

Un système dynamique est dit couplé si une de ses entrées influence plusieurs de ses sorties (Figure 12). Il est possible d'imaginer qu'il n'est pas aisé de contrôler le système en agissant directement et simultanément sur les 4 entrées physiques du système afin de prendre une trajectoire voulue. En effet, il est difficile pour le pilote de savoir comment manipuler ces entrées physiques afin d'influencer qu'une et une seule sortie, par exemple en commandant la hauteur  $z$  sans influencer les angles.

Il serait plus aisé de pouvoir interagir directement sur une sortie du système sans perturber les autres sorties comme par exemple en imaginant l'utilisation d'un joystick ou d'un volant par le skippeur.

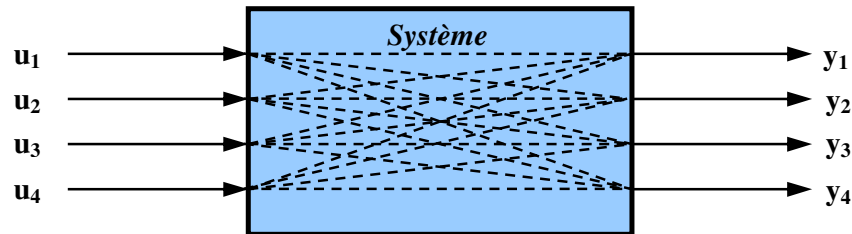


Figure 12: Système non découplé

Le découplage d'un système consiste donc à commander uniquement une sortie sans influencer d'autres sorties (Figure 13). Ces sorties sont commandées par des entrées virtuelles  $r$  commandant les entrées physiques du système pour avoir des sorties découplées.

Le découplage peut être effectué en intégrant un découpleur en amont du système à commander dont les entrées virtuelles  $r$  du système sont découplées par rapport aux sorties  $y$  du système (Figure 14).

Le pilote va pouvoir ainsi agir directement sur ces entrées virtuelles du système pour agir sur les sorties du système. Le nombre d'entrées virtuelles  $r$  doit être égale aux nombres d'entrées physiques du système donc 4 dans le cas de l'hydroptère.

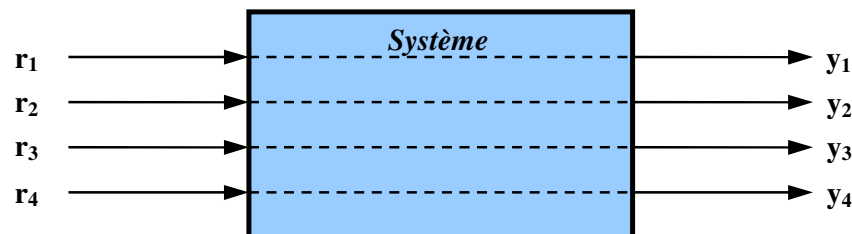


Figure 13: Système découplé

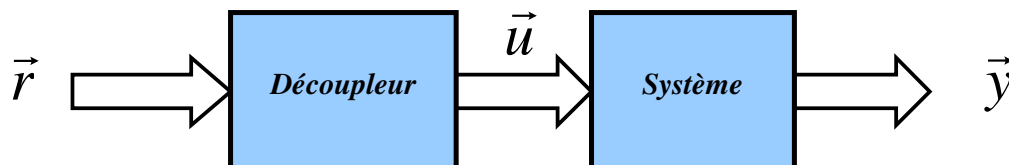


Figure 14: Schéma d'implantation du découpleur

## 3.2 Découplage par contre-réaction

### 3.2.1 Boucle ouverte (non découplé)

Une première étape consiste à analyser le système sans découpleur en observant sa fonction de transfert ce qui donne une idée du couplage du système. Le module de la fonction de transfert est le rapport (en dB) entre chaque entrées et chaque sorties du système en fonction de la fréquence (3.3). Pour établir la fonction de transfert, on suppose que le système est linéaire (3.1) autour du point de fonctionnement où ne varie que très peu autour de celui-ci.

Soit un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} s \cdot x(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\ x(s)(sI + A) &= Bu(s) \\ x(s) &= (sI - A)^{-1} Bu(s) \\ y(s) &= C \underbrace{(sI - A)^{-1} B}_{H_1(s)} u(s) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$H_1(jw) = \frac{y(jw)}{u(jw)} = \begin{bmatrix} H_{11}(jw) & H_{12}(jw) & H_{13}(jw) & H_{14}(jw) \\ H_{21}(jw) & H_{22}(jw) & H_{23}(jw) & H_{24}(jw) \\ H_{31}(jw) & H_{32}(jw) & H_{33}(jw) & H_{34}(jw) \\ H_{41}(jw) & H_{42}(jw) & H_{43}(jw) & H_{44}(jw) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Système découplé en boucle ouverte

Pour découpler le système, il faut minimiser (idéalement supprimer) les éléments non diagonaux de la fonction de transfert entre les sorties et les entrées virtuelles (3.4). On obtient ainsi un système dont les entrées agissent directement sur les sorties sans interférer sur les autres sorties du système (3.5).

$$H_2(jw) = \frac{y(jw)}{r(jw)} = \begin{bmatrix} H_{11}(jw) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22}(jw) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33}(jw) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44}(jw) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(jw) = H_{11}(jw) \cdot r_1(jw) \\ y_2(jw) = H_{22}(jw) \cdot r_2(jw) \\ y_3(jw) = H_{33}(jw) \cdot r_3(jw) \\ y_4(jw) = H_{44}(jw) \cdot r_4(jw) \end{cases} \quad (3.5)$$

Une solution consiste à découpler le système par contre réaction, dans ce cas la contre réaction ne sert pas à contrôler ou stabiliser le système à partir d'une consigne mais à découpler le système.

Soit un consigne de type  $u=Kx+Nr$ , il faut déterminer les matrices  $N$  et  $F$  afin de découpler le système [2]. Cela équivaut à minimiser les éléments non diagonaux de la fonction de transfert en boucle ouverte (3.3) afin d'obtenir une fonction de transfert diagonale (3.4).

Soit le système suivant ou  $y$  représente les variables de sorties à découpler :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx + Nr \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\ sx(s) &= (A + BK)x(s) + BNr(s) \\ x(s) &= (sI - A - BK)^{-1} BNr(s) \\ y(s) &= Cx(s) = \underbrace{C(sI - A - BK)^{-1} BN}_{H_2(s)} r(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

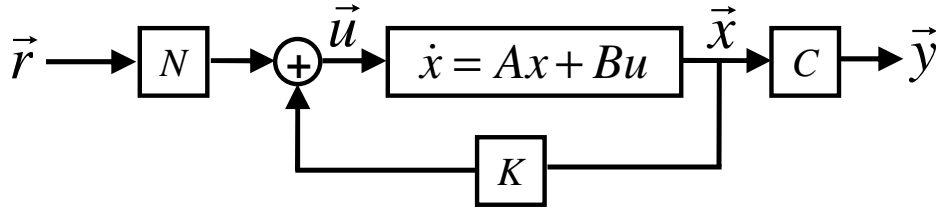


Figure 15: Structure d'un découpleur par contre-réaction

Une condition suffisante pour que le découplage par contre réaction soit réalisable dans le cas de système à temps invariant, est que la matrice  $\Delta$  soit inversible (3.8).

$$\Delta = \begin{bmatrix} C_1 A^{\kappa_1-1} B \\ C_2 A^{\kappa_2-1} B \\ \vdots \\ C_m A^{\kappa_m-1} B \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} C_1 A^{\kappa_1-1} \\ C_2 A^{\kappa_2-1} \\ \vdots \\ C_m A^{\kappa_m-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\text{avec} \quad \kappa_i = \begin{cases} \min(j \mid C_i^T A^{j-1} B \neq 0^T, j=1,2,\dots,n-1) \\ n-1; \text{ si } C_i^T A^{j-1} B = 0^T, j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (3.9)$$

On peut ensuite évaluer les matrices  $K$  et  $N$  :

$$N = \Delta^{-1} \quad (3.10)$$

$$K = -\Delta^{-1} \Omega \cdot A \quad (3.11)$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{m,n}$ ,  $K \in \mathcal{M}_{m,n}$ ,  $N \in \mathcal{M}_{m,m}$

Dans le cas de l'Hydroptère, le système possède 4 entrées physiques donc il est possible d'assigner 4 sorties à découpler. Les sorties sélectionnées pour le découplage sont les angles et la position  $z$ . En effet, les autres trajectoires du bateau ( $x$  et  $y$ ) sont contrôlables par le biais des angles du bateau (3.12).

Cependant, le choix des états à découpler est libre mais il n'est pas assuré que les états choisis soient correctement découplés ce qui va être étudié après observation de la fonction de transfert du système (Figure 19).

$$\vec{r} = [z \quad \varphi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (3.12)$$

Le système intégrant le découpleur peut être assimilé à un nouveau système équivalent d'entrée  $r$  et de sortie  $x$  (3.14).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx + Nr \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(Kx + Nr) \\ \dot{x} &= \underbrace{(A + BK)}_{A_2} x + \underbrace{BN}_{B_2} r \end{aligned} \quad (3.14)$$

D'où le système équivalent intégrant le découpleur :

$$\dot{x} = A_2 x + B_2 r \quad (3.15)$$

avec :  $A_2 \in \mathcal{M}_{12,12}$ ,  $B_2 \in \mathcal{M}_{12,4}$ ,  $K \in \mathcal{M}_{4,12}$ ,  $N \in \mathcal{M}_{4,4}$ ,  $x \in \mathcal{M}_{12,1}$ ,  $r \in \mathcal{M}_{4,1}$ ,  $y \in \mathcal{M}_{4,1}$

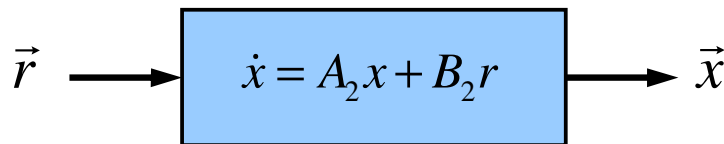


Figure 16: Système équivalent

Cette représentation sous forme d'un système équivalent permet d'évaluer la stabilité du nouveau système par observation des valeurs propres de la matrice  $A_2$ . Un système est stable pour autant que ses valeurs propres réelles soient négatives (exponentielle décroissante). De



plus, la représentation sous cette forme facilite la représentation des fonctions de transfert sous Matlab.

$$\text{stable si } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \quad (3.16)$$

Où  $\lambda$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

### 3.2.3 Système découplé en boucle fermée

Le système équivalent découplé (Figure 1) est de la même forme que le système de départ, il est donc possible d'effectuer un contrôle entre  $y$  et  $r$  pour stabiliser le système.

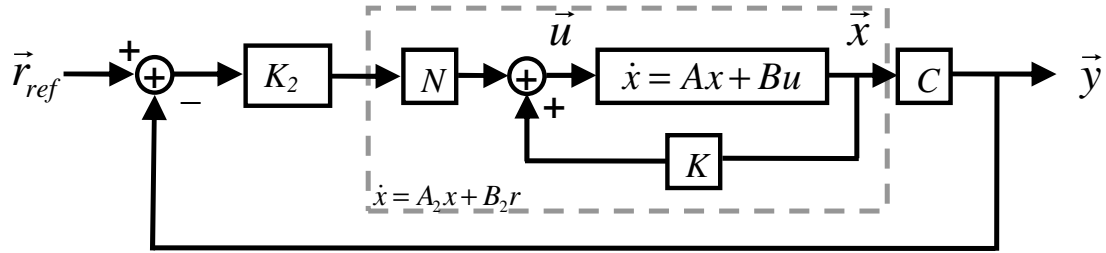


Figure 17: Structure d'un système découplé

Il est possible de déterminer la nouvelle fonction de transfert comprenant cette contre réaction. La matrice de gain  $K_2$  est évalué par LQR uniquement sur les sorties découplées, c'est-à-dire  $z$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  mais également leurs dérivées  $\dot{z}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\psi}$  (3.17) (voir 2.2).

D'où

$$\vec{r}_{ref} = \begin{bmatrix} z & \phi & \theta & \psi & \dot{z} & \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_2x + B_2r \\ r = K_2(r_{ref} - y) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} r(s) &= -K_2(r_{ref}(s) - Cx(s)) \\ sX(s) &= A_2X(s) + B_2K_2r_{ref}(s) - B_2K_2Cx(s) \\ X(s) &= \underbrace{(sI - A_2 + B_2K_2C)^{-1} B_2K_2}_{H_3(s)} r_{ref}(s) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Comme dans le cas du découpleur, il est possible de représenter le découpleur en boucle fermée par un système équivalent (3.21).

$$\begin{aligned} r &= -K(r_{ref} - Cx) \\ \dot{x} &= A_2x + B_2K_2r_{ref} - B_2K_2Cx \\ \dot{x} &= \underbrace{(A_2 - B_2K_2C)}_{A_3}x + \underbrace{B_2K_2}_{B_3}r_{ref} \end{aligned} \quad (3.20)$$

D'où le nouveau système :

$$\dot{x} = A_3 x + B_3 r_{ref} \quad (3.21)$$

avec :  $A_3 \in \mathcal{M}_{12,12}$ ,  $B_3 \in \mathcal{M}_{12,4}$ ,  $K \in \mathcal{M}_{4,12}$ ,  $K_2 \in \mathcal{M}_{4,8}$ ,  $F \in \mathcal{M}_{4,4}$ ,  $x \in \mathcal{M}_{12,1}$ ,  $r \in \mathcal{M}_{4,1}$ ,  $y \in \mathcal{M}_{4,1}$

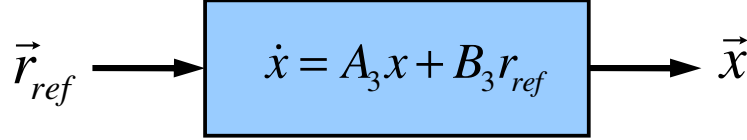


Figure 18: Structure équivalent d'un découpleur en boucle fermée

La stabilité du système est alors donnée par les valeurs propres de la matrice  $A_3$  du système.

### 3.3 Analyse de la fonction de transfert

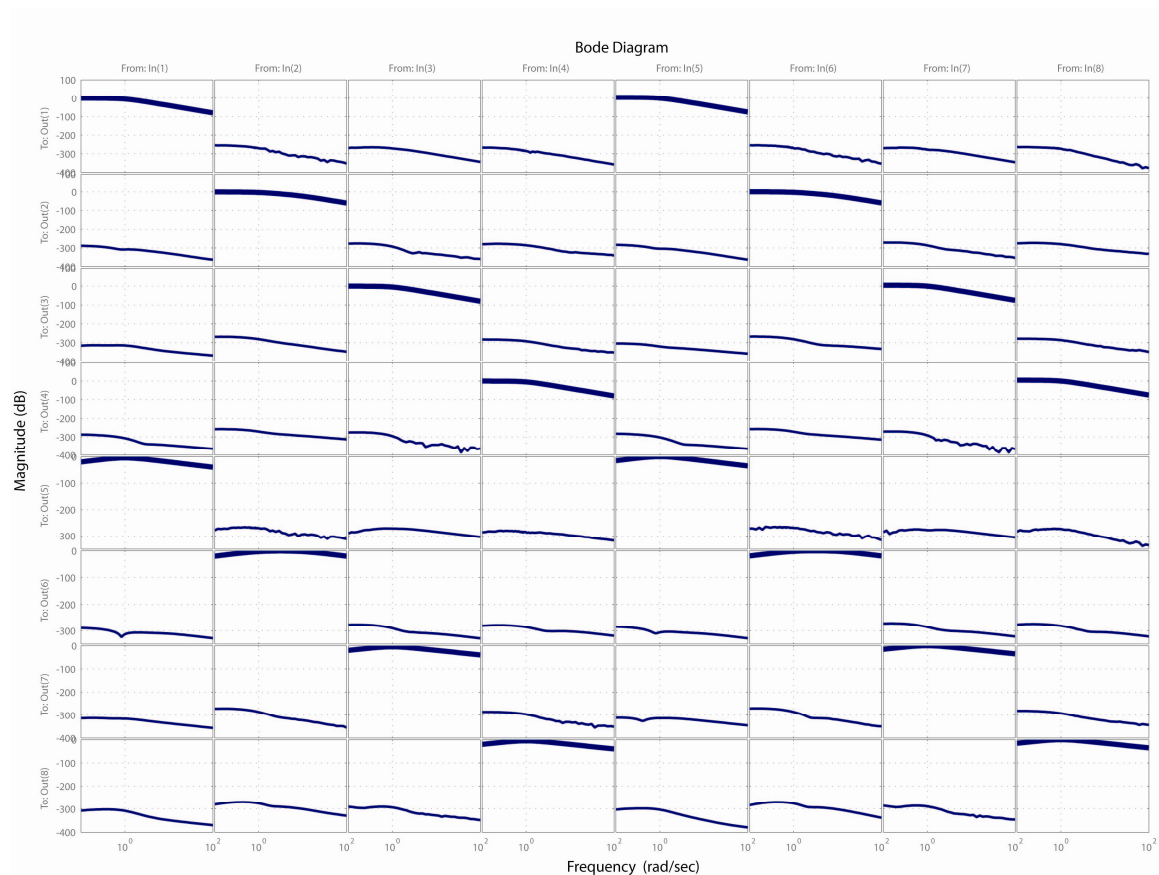
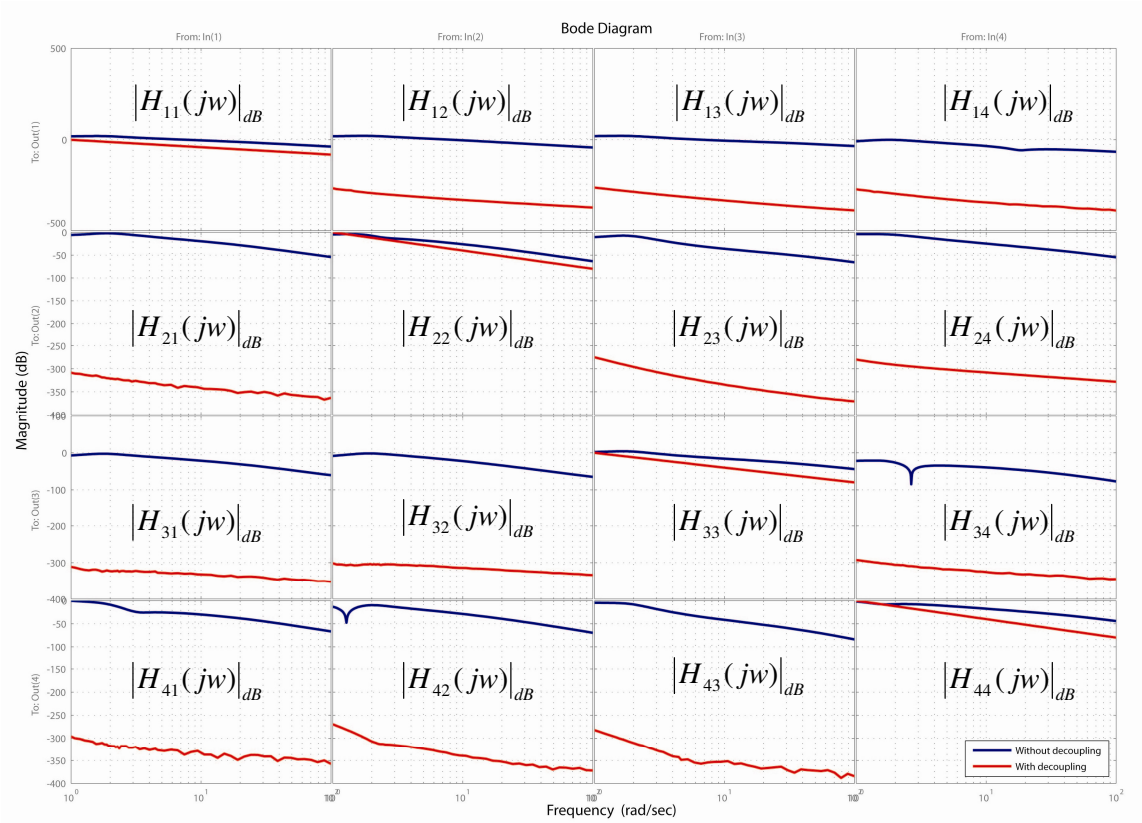
La fonction de transfert permet facilement de vérifier que le système est correctement découplé autour du point de fonctionnement. Chaque sous-graphe de la figure représente une fonction de transfert entre une seule entrée et une seule sortie. L'amplitude de la fonction de transfert donne le rapport d'amplification entre les entrées sur les sorties du système, cela permet de vérifier facilement que les matrices  $K$  et  $F$  déterminées sont correctes ou de constater que les états choisis pour le découplage ne sont pas découplables.

Le graphe du système découplé en boucle ouverte montre bien que les éléments non diagonaux sont fortement atténués par rapport à la matrice de transfert en boucle ouverte ce qui laisse présager que le découplage est possible sur les sorties choisis (Figure 19, Equation (3.7)).

Cependant, la « qualité » du découplage est fonction de la fréquence d'excitation de l'entrée. Bien que le système que le découplage soit correcte entre 1 et 100Hz, celui-ci se dégrade légèrement pour de très basses (env.  $1e^{-8}$  Hz) et de très hautes fréquences (env.  $1e^{20}$  Hz).

La fonction de transfert du système découplé en boucle fermée montre également que les sorties sont toujours découplées malgré l'implantation d'une d'autre boucle de contre réaction pour le contrôle des entrées virtuelles (Figure 20, Equations (3.17) et (3.19)).

Chaque variable de sortie et sa dérivée sont découplées par rapport aux sorties (trait bleu en gras). En effet, il n'est pas possible de découpler une variable et sa dérivée car elles sont liées par intégration.



### 3.4 Simulation du système découplé

La simulation avec découpleur est effectuée tout d'abord sur le système linéaire (1.7). Etant donné que les matrices du découpleur  $K$  et  $N$  sont basées sur le système linéaire du système autour de son point de fonctionnement, cela permet de vérifier que le système est bien découplé en accord avec la fonction de transfert trouvée (Figure 19). Le système découplé est ensuite simulé sur le système réel, c'est-à-dire le système non linéaire (1.2).

Les simulations sont effectuées avec le système découplé en boucle fermée (§3.2.3). Les figures suivantes (Figure 21, Figure 22, Figure 23 et Figure 24) représentent uniquement les réponses sur les états choisis pour le découplage (3.12) avec l'application d'un saut unité sur chacune des entrées virtuelles  $r$  du système.

Ces graphes montrent bien que la simulation du système linéaire donne lieu à un bon découplage des sorties du système. La simulation du système non linéaire est correcte pour autant que l'on se trouve très près du point de fonctionnement, il est possible de voir sur les Figure 22 et Figure 23 une instabilité de certains états du système due à la non-linéarité du système.

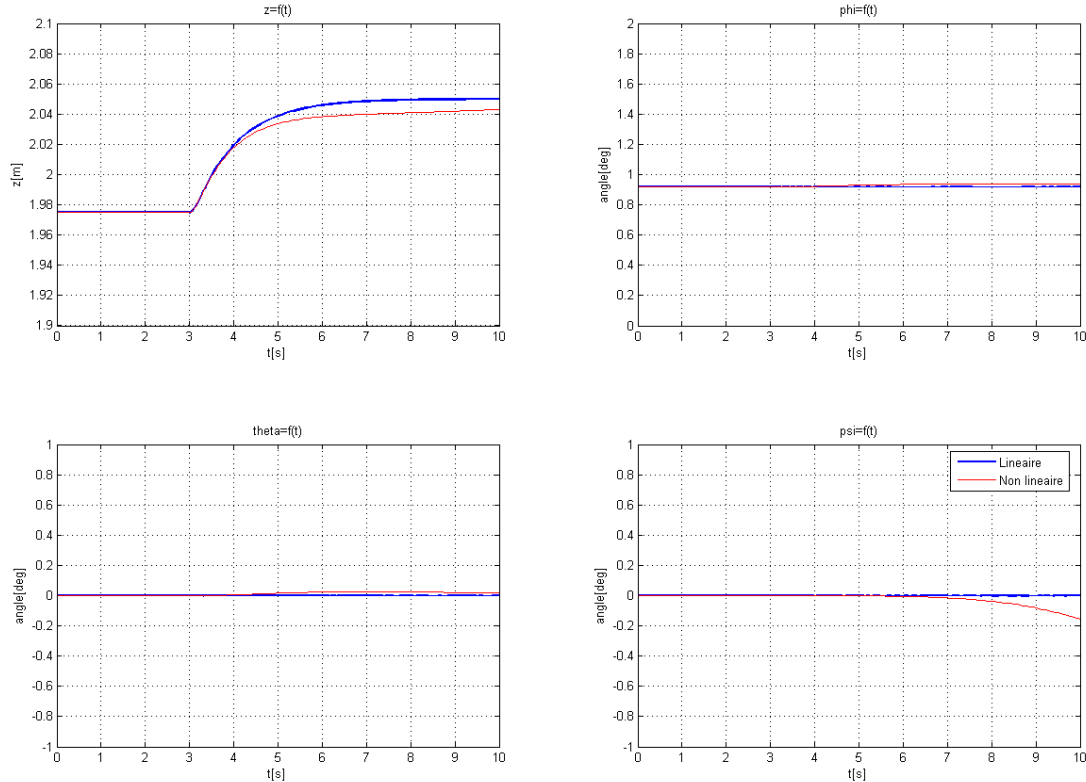


Figure 21 : Réponse à un saut unité sur  $z$  (Système linéaire et non-linéaire)

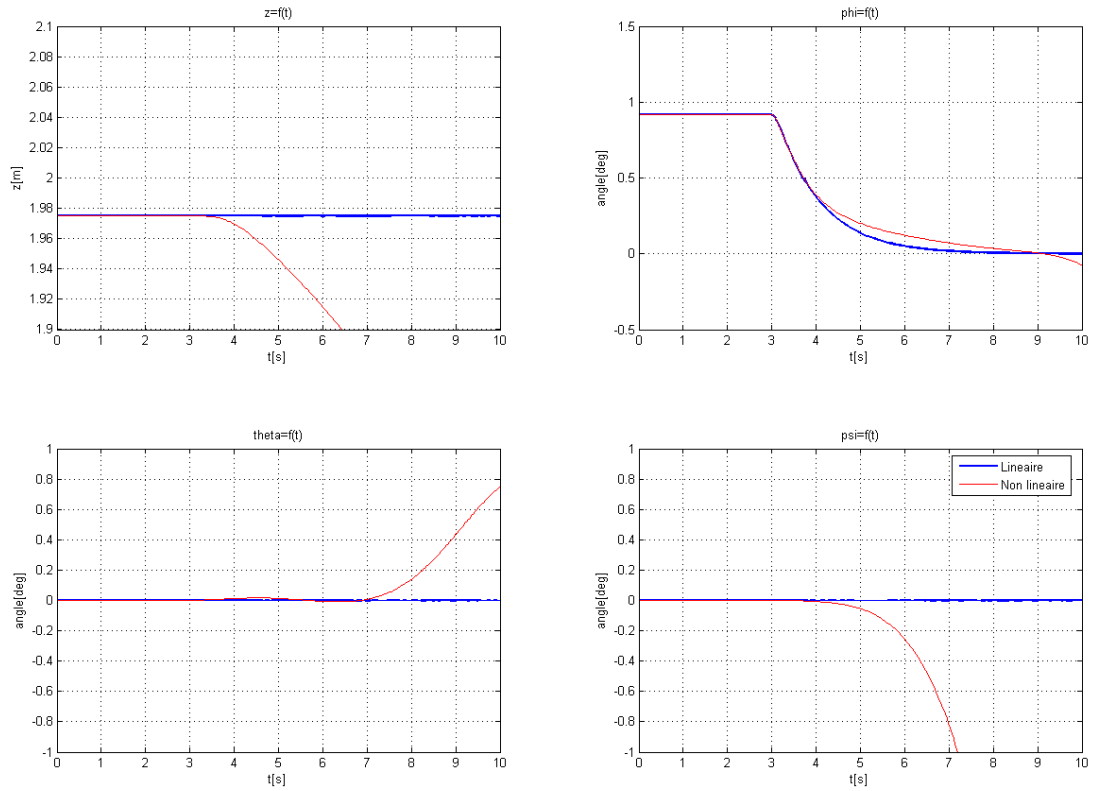


Figure 22: Réponse à un saut unité sur  $\phi$  (Système linéaire et non-linéaire)

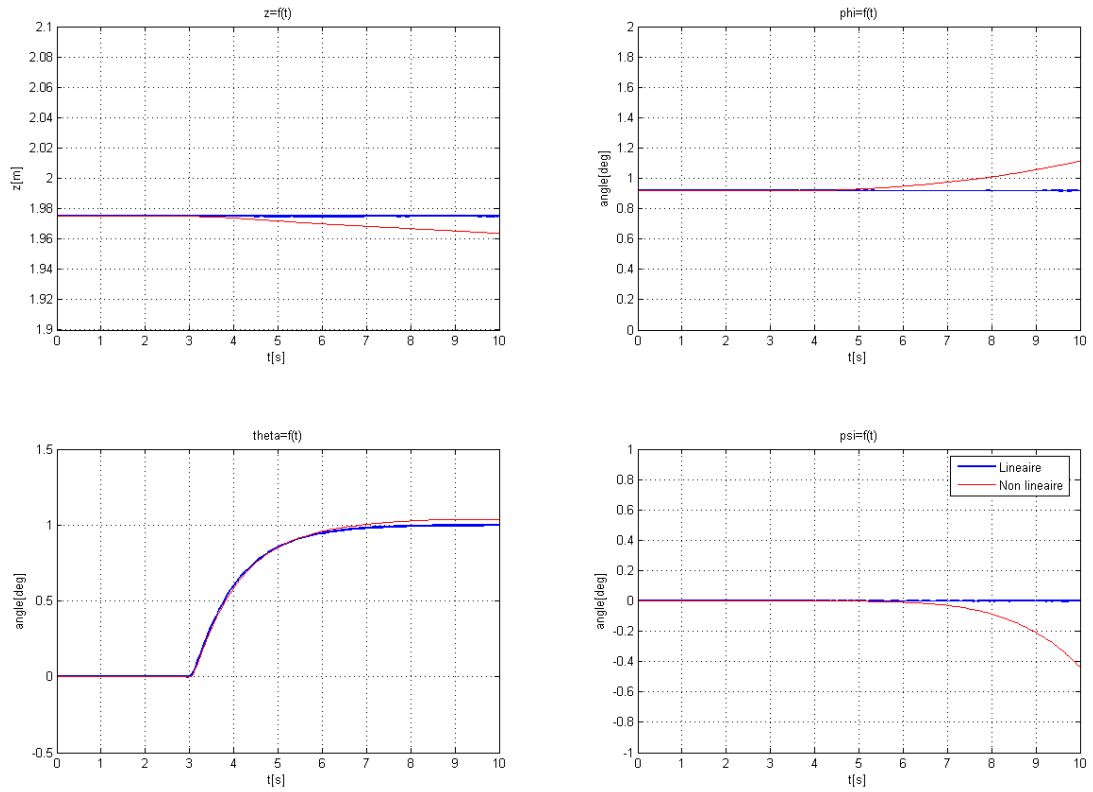


Figure 23: Réponse à un saut unité sur  $\theta$  (Système linéaire et non-linéaire)

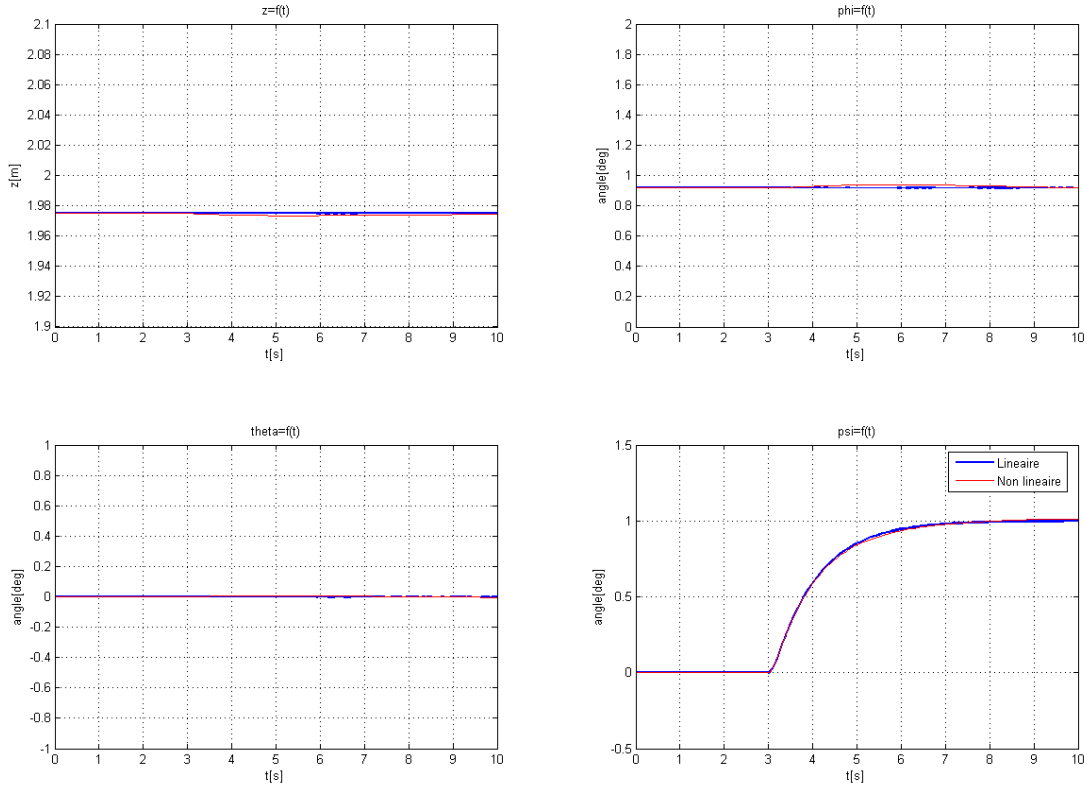


Figure 24: Réponse à un saut unité sur  $\psi$  (Système linéaire et non-linéaire)

## 4 Conclusion

Dans une première partie, il a été possible de démontrer qu'une procédure d'amerrissage était envisageable sur l'Hydroptère. L'implantation d'une commande automatique permet d'amerrir le bateau en dissipant presque 20 fois moins d'énergie comparée à un amerrissage en boucle ouverte. Cette importante diminution d'énergie au temps d'impact nécessite néanmoins un contrôle sur les 4 entrées du système. Toutefois, le paramètre  $\alpha$  a été ajusté pour un seul point de fonctionnement, il serait donc intéressant d'étudier la robustesse du paramètre  $\alpha$  pour d'autres points de fonctionnement afin de pouvoir l'ajuster et ainsi obtenir un amerrissage optimal dans toutes les conditions.

La seconde partie concernant le découplage du système a démontré que le système linéarisé est correctement découplé pour les sorties choisies. Les simulations sur le système linéarisé autour du point du fonctionnement ont montré que l'implantation d'un découpleur permettait d'interagir sur une seule sortie sans influencer les autres sorties du système. Cependant, les simulations sur le système non linéaire ont montré que le découplage est possible seulement pour de faibles écarts autour du point de fonctionnement. Une idée serait de découpler le système non pas à partir du système linéaire mais à partir du système réel c'est qui donnerait lieu à l'implantation d'un découpleur non linéaire.

## 5 Références

- [1] D. Gillet, « Systèmes multivariables I », *Laboratoire d'automatique*, Lausanne, Septembre 2006.
- [2] W. Rugh, "Linear system theory", *Prentice hall information and system sciences series*, 1993.
- [3] A. Merdassi, "Hydropter modelling and control", *Projet de semestre*, Summer 2006.
- [4] R. Longchamp, « Commande numérique de systèmes dynamiques », Cours d'automatique, *Presses polytechniques et universitaires romandes*, Lausanne, Janvier 2006.
- [5] Q. Wang, "Decoupling Control", Lectures notes in control and information sciences no. 285, *Springer*, 2003.