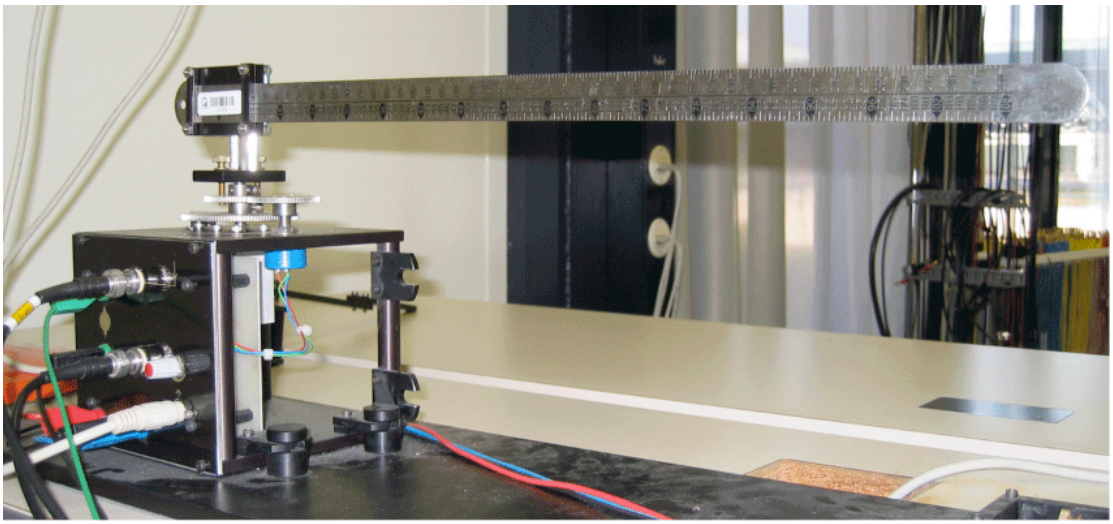
PROJET DE SEMESTRE
Christina Natterer
Master semestre 2

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Régulateur robuste sur bras flexible



Assistants :Alireza Karimi et Gorka Galdos
Professeur : Roland Longchamps

Table des matières :

I. BUT DU PROJET **3**

II. DESCRIPTION DU SYSTÈME **4**

III. IDENTIFICATION **4**

CHOIX DES PARAMÈTRES SBPA **4**
ANALYSE FRÉQUENTIELLE **5**
ANALYSE SPECTRALE **6**
CHOIX DE LA MÉTHODE D'ANALYSE **7**
CHOIX DES IDENTIFICATIONS **7**

IV. LE RÉGULATEUR **9**

MÉTHODE **9**
LE RÉGULATEUR PD ET PID **10**
LE RÉGULATEUR PD 10
LE RÉGULATEUR PID 12
LE RÉGULATEUR RST **14**

V. CONCLUSION **19**

VI. SOURCES **20**

I. But du projet

Le but de mon projet de semestre au sein du laboratoire d'automatique est de dimensionner un régulateur robuste pour un bras flexible.
Pour mener à bien ce projet, nous allons utiliser la méthode décrite dans l'article « Robust Loop Shaping Controller Design for Spectral Models by Quadratic Programming » [1]. Il nous a donc fallu identifier le système afin d'obtenir les différentes réponses fréquentielles associées aux différentes configurations du système.

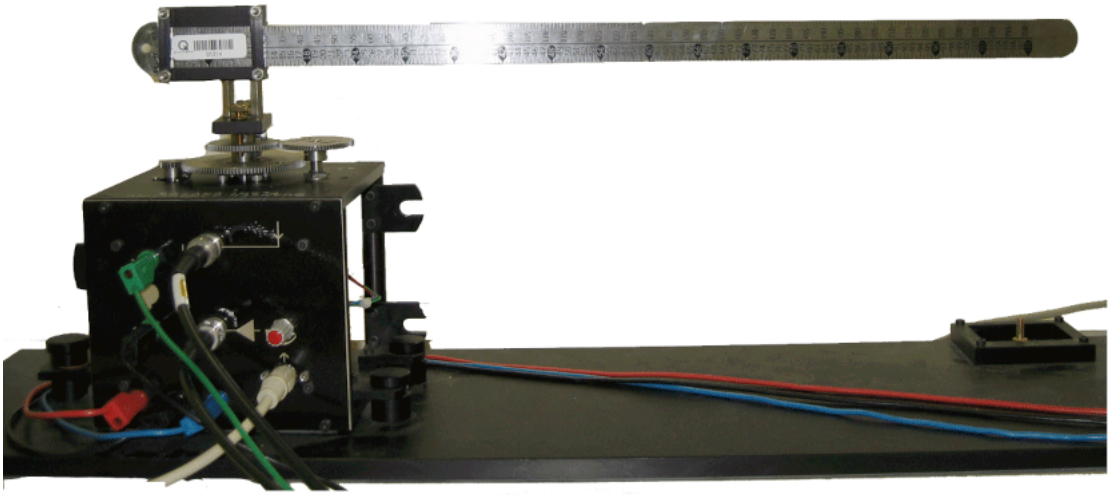
En effet, le système a plusieurs configurations différentes, car nous allons décider aléatoirement la position des masses sur le bras flexible et du nombre d'entre elles. Le système est donc incertain. Ainsi, nous allons dimensionner un régulateur capable de traiter toutes ces incertitudes.

Après identification du système et observation de ses sensibilités – soit masse ou position- nous allons synthétiser un régulateur robuste à l'aide de la méthode décrite dans l'article.

Afin d'appliquer la méthode, nous avons besoin de tous les modèles non-paramétriques lié à nos différentes configurations. Par la suite, il s'agira de satisfaire la relation $\|W_1 S_i\| < 1$, où S_i représente la fonction de sensibilité de nos différentes configurations et W_1 représentant les contraintes à satisfaire.

II. Description du système

Le système, représenté sur la figure ci-dessous, est composé d'un bras souple en acier inox actionné par un moteur.



Les masses, représentées par de simple aimants qui adhère au bras, vont être positionnées tout au long du bras afin de diagnostiquer les sensibilités du système. À la base du bras, deux jauge de contrainte mesurent la déformation du bras.

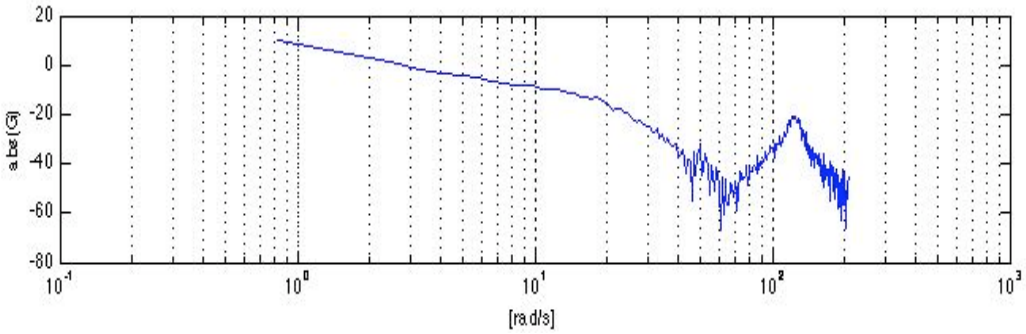
III. Identification

Afin d'identifier le système, nous l'avons excité avec un Signal Bilinéaire Pseudo-Aléatoire (SBPA). Ce signal est périodique et est caractérisé par un registre n, directement lié aux nombres de points récoltés par la relation 2^n-1, et une fréquence d'échantillonnage h.

Choix des paramètres SBPA

Sur la base des travaux déjà effectués sur le système, nous avons décidé de commencer notre identification avec les paramètres n=8, qui correspond à 255 points récoltés, et h=0.03 secondes.
Or en observant le diagramme de Bode obtenu avec ces valeurs, nous nous sommes rendu compte que le pic de résonance n'était pas complet, il nous manquait donc quelques informations.
Nous avons donc choisi de récolter plus de point en augmentant n à 9, ce qui correspond à 511 (2^9-1) points récoltés et de diviser h par 2, ainsi le signal excitera des fréquences plus élevées.

La figure ci-dessous représente la réponse fréquentielle avec ces valeurs.



Maintenant que nous avons choisi les paramètres du signal SBPA, nous allons analyser les données récoltées. Pour cela, nous avons à notre disposition deux méthodes d'analyse :

- L'analyse fréquentielle
- L'analyse spectrale

Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle est caractérisée par la transformée de Fourier de l'entrée du système et la transformée de Fourier de la sortie du système. Mais, comme il n'est pas possible d'intégrer dans l'intervalle (-∞ , +∞), il faut nécessairement intégrer entre des bornes temporelles finies, ce qui introduit des erreurs de troncature. Par conséquent il est recommandé d'utiliser une entrée périodique avec un nombre suffisant de données afin d'éliminer l'erreur de troncature et de réduire passablement l'effet du bruit [2]. Afin de limiter les bruits de mesure nous n'avons pas considéré les périodes les trois première périodes considérées comme transitoires, seules les périodes suivantes ont été utilisées pour l'identification du système.

Donc, afin d'obtenir la réponse fréquentielle, il suffit de diviser la transformée de Fourier de la sortie Y(w) par la transformée de Fourier de l'entrée U(w) :

Réponse fréquentielle :

$$G(jw) = \frac{Y(w)}{U(w)}$$

Afin de minimiser au maximum les erreurs mesure, nous avons fait plusieurs expériences par identification. Nous avons dû ainsi faire une moyenne des réponses fréquentielles obtenues à l'aide de la relation ci-dessous.

Réponse fréquentielle moyenne :

$$G_m(e^{jw}) = \frac{1}{m} G_i(e^{jw})$$

Analyse spectrale

Afin de calculer la réponse fréquentielle à l'aide de la méthode d'analyse spectrale, plusieurs calculs supplémentaires sont nécessaires. [2]
Tout d'abord, nous avons eu besoin des fonctions auto- et intercorélation calculé à l'aide des relations suivantes:

Fonction d'auto corrélation

$$R_{uu} = \frac{1}{N} \sum u(k)u(k+h)$$

Fonction d'inter corrélations

$$R_{uy} = \frac{1}{N} \sum u(k)y(k+h)$$

Par suite, nous avons calculé la transformée de Fourier de ces deux fonctions, qui nous ont donné les fonctions de densité spectrale et interspectrale :

Densité spectrale

$$\phi_{uu} = \sum R_{uu}(h)e^{-j2kh/N}$$

Densité interspectrale

$$\phi_{uy} = \sum R_{uy}(h)e^{-j2kh/N}$$

La réponse fréquentielle recherchée n'est d'autre que la division entre la densité interspectrale et la densité spectrale:

Réponse fréquentielle

$$G(e^{jw}) = \frac{\phi_{uy}(w)}{\phi_{uu}(w)}$$

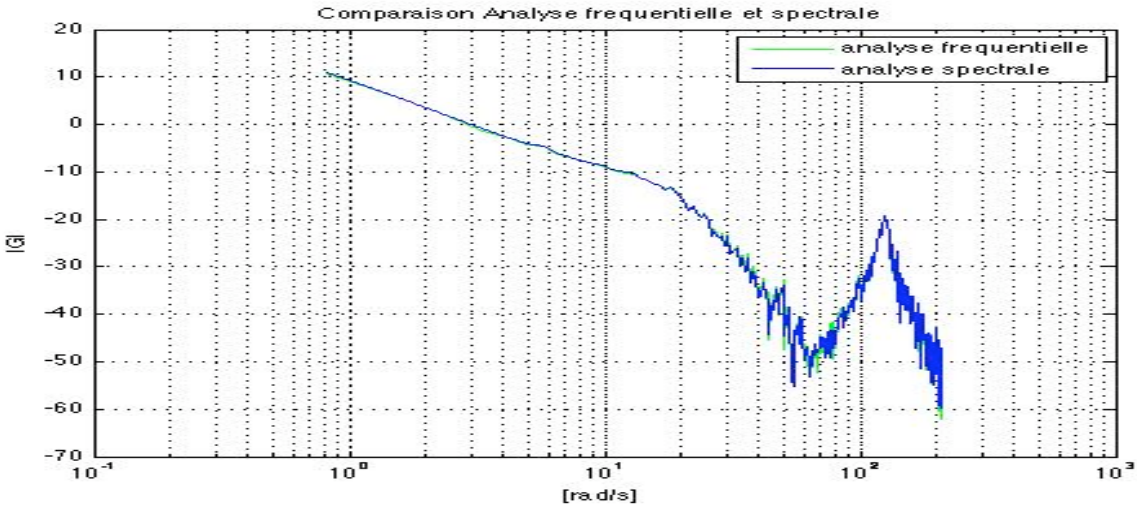
Pour les mêmes raisons expliquées plus au haut dans le paragraphe de l'analyse fréquentielle, nous avons dû calculer la moyenne de toutes ces réponses fréquentielles obtenues. Cette fois-ci, la moyenne se calcule en divisant la moyenne des densités interspectrales avec la moyenne des densités spectrales :

Réponse fréquentielle moyenne :

$$G_m(e^{jw}) = \frac{\frac{1}{m}\sum \phi_{uy,i}(w_k)}{\frac{1}{m}\sum \phi_{uu,i}(w_k)}$$

Choix de la méthode d'analyse

En observant le graphe ci-dessous, représentant deux courbes traitées avec des méthodes d'analyse différentes, nous pouvons observer que, dans notre cas, le choix de la méthode d'analyse ne représente pas une grande différence.



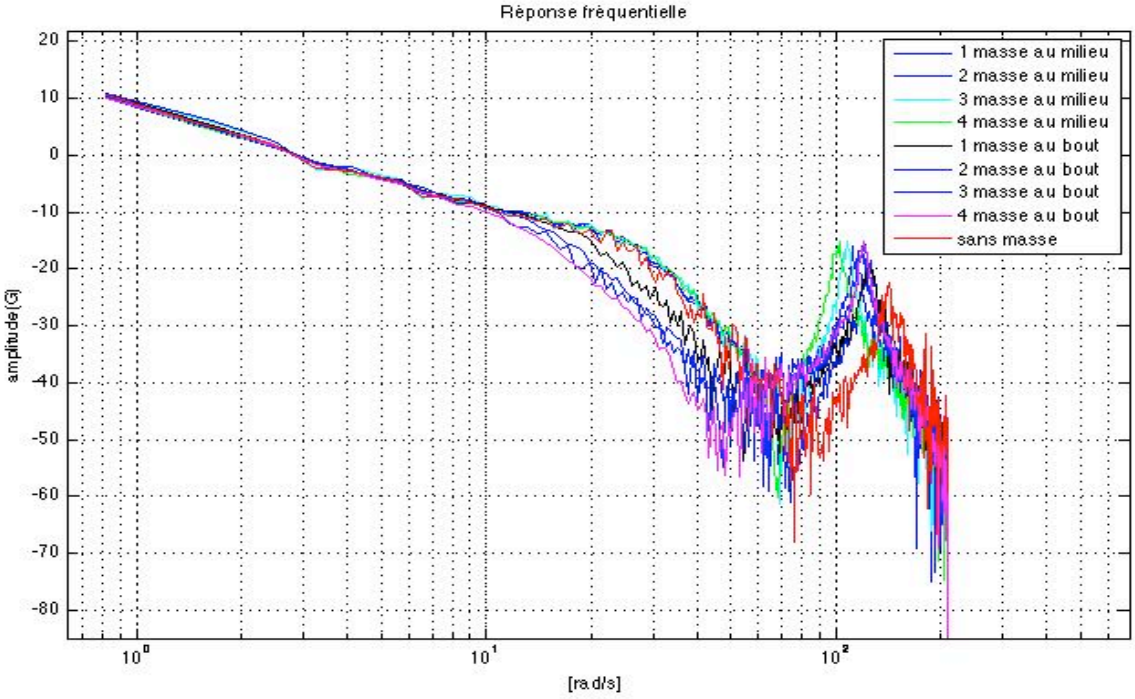
C'est pourquoi, pour des raisons de facilité de calculs, nous avons décidé d'utiliser la méthode d'analyse fréquentielle.

Choix des identifications

En comparant les graphes des différentes identifications, nous avons pu identifier les sensibilités du système. En effet, nous avons posé les masses à tour de rôle à différente position du bras. À l'aide du diagramme de Bode de ces différentes configurations, nous avons conclu que le système est sensible au nombre de masse essentiellement, mais aussi légèrement à la position. Nous n'avons toutefois pas estimé nécessaire de mettre au point un régulateur robuste pour les identifications faites lorsque la masse se trouve proche de l'axe de rotation, car celle-ci est très proche de l'identification sans masse.
Nous avons donc décidé de nous concentrer sur les identifications suivantes :

- sans masse
- 1, 2, 3, 4 masse(s) positionnée(s) au bout
- 1, 2, 3, 4 masse(s) positionnée(s) au milieu

La figure suivante représente le diagramme de Bode de ces différentes identifications :



Nous observons que le pic de résonance est à fréquence plus élevée quand le bras n'a pas de masse (courbe rouge), mais que l'amplitude de ce pic est moins élevée que lorsqu'une masse est positionnée sur le bras.
Nous pouvons aussi observer que les pôles et les zéros des différentes fonctions de transfert décrites ci-dessus ne sont pas les mêmes. En effet, nous remarquons que les pôles des identifications avec quatre masses au milieu et sans masse sont plus grands que ceux obtenus lorsqu'il y a quatre masses au bout par exemple.

Il est à noter aussi que le système possède un intégrateur.

IV. Le régulateur

Maintenant que nous avons les différents modèles non-paramétriques $G_i(jw)$ correspondant aux différentes identifications effectuées, nous pouvons appliquer la méthode décrite dans l'article « Robust Loop Shaping Controller Design for Spectral Models by Quadratic Programming» [1].

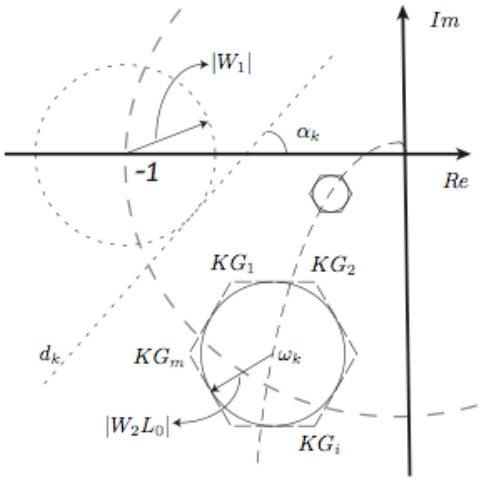
Méthode

Si *S* est la fonction de sensibilité et *T* la fonction de sensibilité complémentaire de notre système, alors $\|W_1S\|<1$ représente les performances nominales et $\|W_2T\|$ traduit la robustesse nominale.
Pour des systèmes incertains, la condition suffisante et nécessaire pour des performances robustes est donc donnée par la relation suivante :

$$\| \, |W_1S| + |W_2T| \, \| < 1 \qquad [1]$$

L'approximation de cette relation aux différentes identifications effectuées se traduit par la résolution de l'équation suivante : $\| W_1S_i \| < 1$ avec i=1…9
Avec S_i représentant la fonction de sensibilité de nos différentes identifications.
Nous allons donc trouvé un régulateur qui satisfasse les contraintes posées par W_1.

L'interprétation graphique de la relation ci-dessus est représentée sur la figure ci-dessous. Comme le montre cette figure, W_1 représente le cercle centré en –1 de rayon variable en fonction de la fréquence. Ce filtre W_1 désignera les emplacements où le diagramme de Nyquist du régulateur pourra passer. Il fixera donc nos contraintes sur le système.

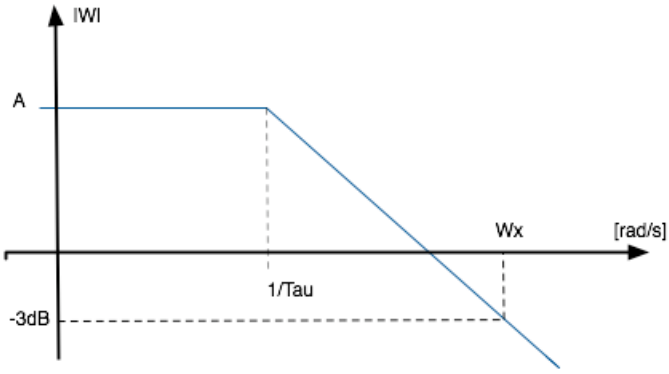


Le cercle W_1 est approximée à l'aide de droites. Ces droites auront pour tâche de délimiter une zone réservées aux basses, moyennes et hautes fréquences suivant les contraintes soumises. Cela donne donc des contraintes linéaires (convexes) pour chaque pulsation w.
Pour des basses fréquences, typiquement $w_k<w_x$,(qui correspond à une fréquence un petit peu plus élevée que la fréquence de coupure) une droite parallèle à l'axe des réel pourra être choisie. Par contre, pour les hautes fréquences ($w_k>w_x$) une droite perpendiculaire à l'axe des réel est un bon choix afin de laisser le diagramme de Nyquist du régulateur s'enrouler autour de l'origine.
Nous allons résoudre ce problème à l'aide d'une programmation linéaire.

Le régulateur PD et PID

Dans le cas d'un régulateur PD ou PID, nous avons décidé que le filtre W_1 aurait la forme d'un filtre passe-bas :

$$W_1(s) = \frac{A}{\tau s + 1}$$



La figure ci-contre représente la fonction de transfert du filtre W_1.

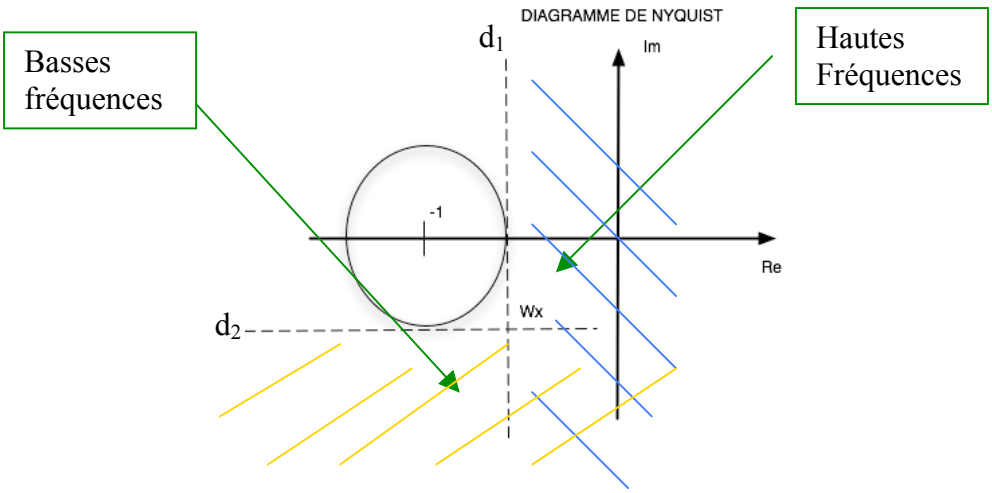
De cette façon, seules les points du modèle non-paramétrique associés aux fréquences au-delà de la fréquence w_x pourrons avoir accès à l'origine du graphe. En effet, W_1, représentant le rayon du cercle centré en –1, a un rayon inférieur à 1 qu'après la fréquence de coupure et laisse ainsi passer la courbe du diagramme de Nyquist passer entre le point –1 et l'origine.

Ainsi nous avons fixé τ à une fois et demi plus rapide que le système, maximiser le gain A et ajuster la fréquence de coupure w_x.

<u>Le régulateur PD</u>

Vu que nous avons déjà un intégrateur dans notre système, nous allons dimensionner un régulateur PD. Les basses fréquences d'un tel système se trouvant à l'infini le long de l'axe des imaginaire négatif dans le diagramme de Nyquist.

Par conséquent, nous avons fixé deux plages dans lesquelles le diagramme de Nyquist du régulateur peut passer :



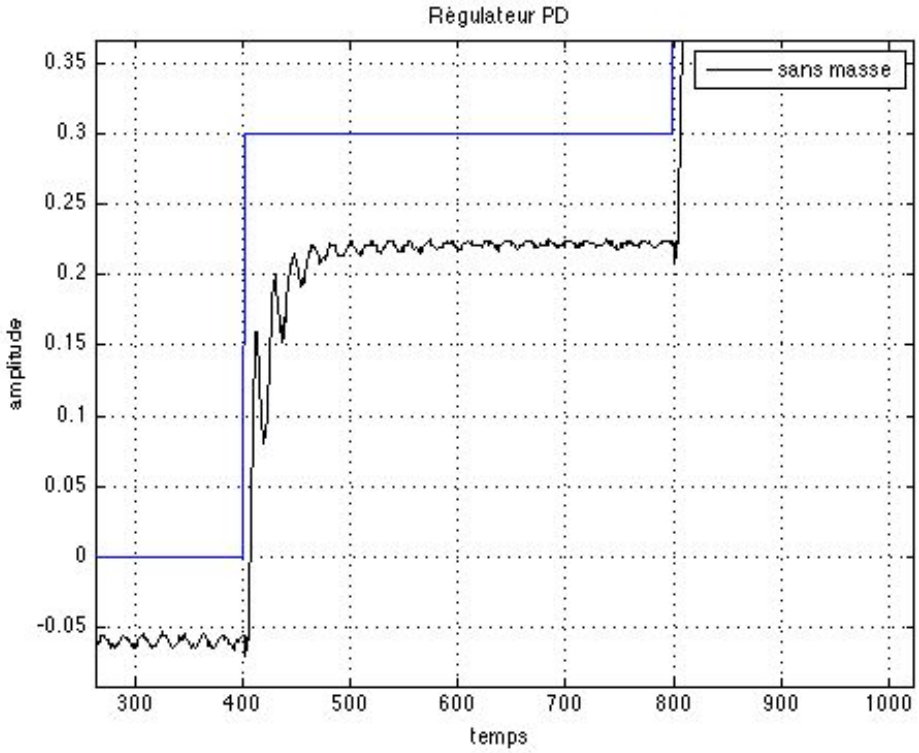
Les paramètres associés à ce régulateur sont :

- Le gain A=1
- La fréquence de coupure w_x= 5 [rad/s]
- La constante de temps τ=0.22
- Le gain du régulateur K_p=1.0276
- La constante de dérivation du régulateur Td=0.088

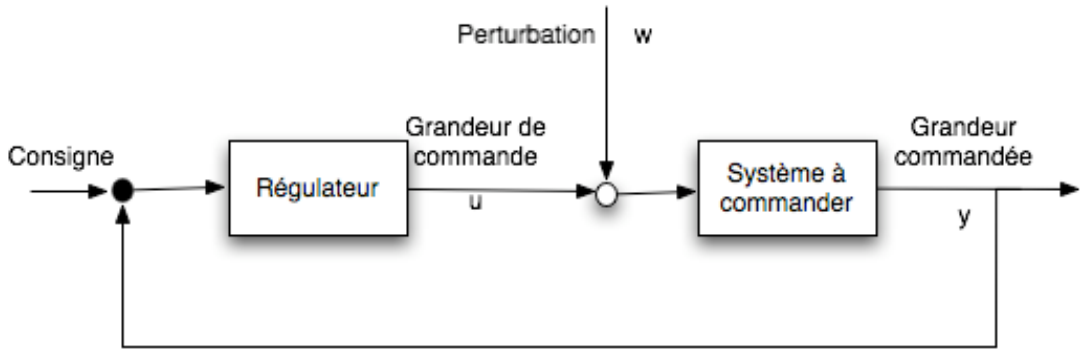
Qui nous donne la fonction de transfert suivant :

$$K(s) = 1.0276(1 + \frac{0.088s}{0.01s + 1})$$

La réponse de ce régulateur est représentée sur la figure suivante :



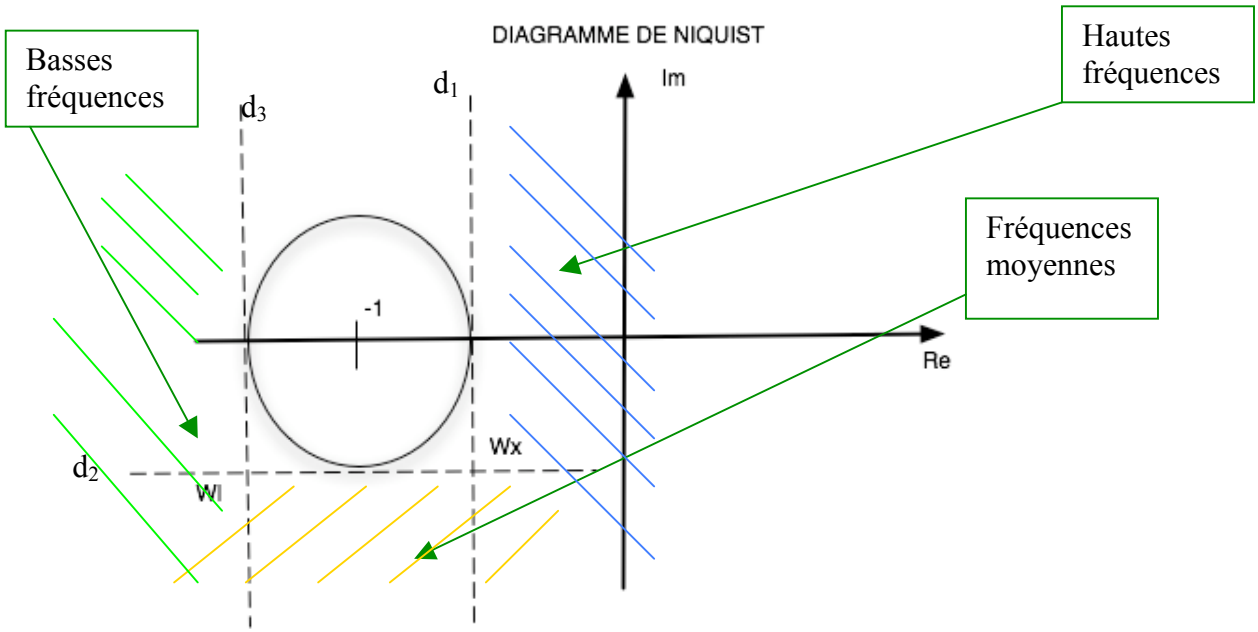
Sur le graphe ci-dessus, nous observons un statisme. En effet, le système est doté d'un intégrateur, cette observation nous laisse donc sans voix. Il se pourrait que la perturbation intervienne après le régulateur. Dans ce cas, nous aurions le schéma fonctionnel suivante :



Le régulateur PID

Pour le régulateur PID, nous avons défini trois zones dans lesquelles les points du modèle non-paramétrique peuvent être placés. En effet, cette fois–ci le système comprendra deux intégrateurs. Les basses fréquences d'un tel système se trouvent à l'infini le long de l'axe des réel négatif dans le diagramme de Nyquist.

Nous avons donc ajouté une troisième zone réservée aux très basses fréquences, donc aux fréquences plus petites que w_l, permettant aux premiers points du modèle non-paramétrique du système de s'approcher de l'axe des réel comme le montre la figure suivante :



De cette façon, nous avons obtenu le résultat suivant :

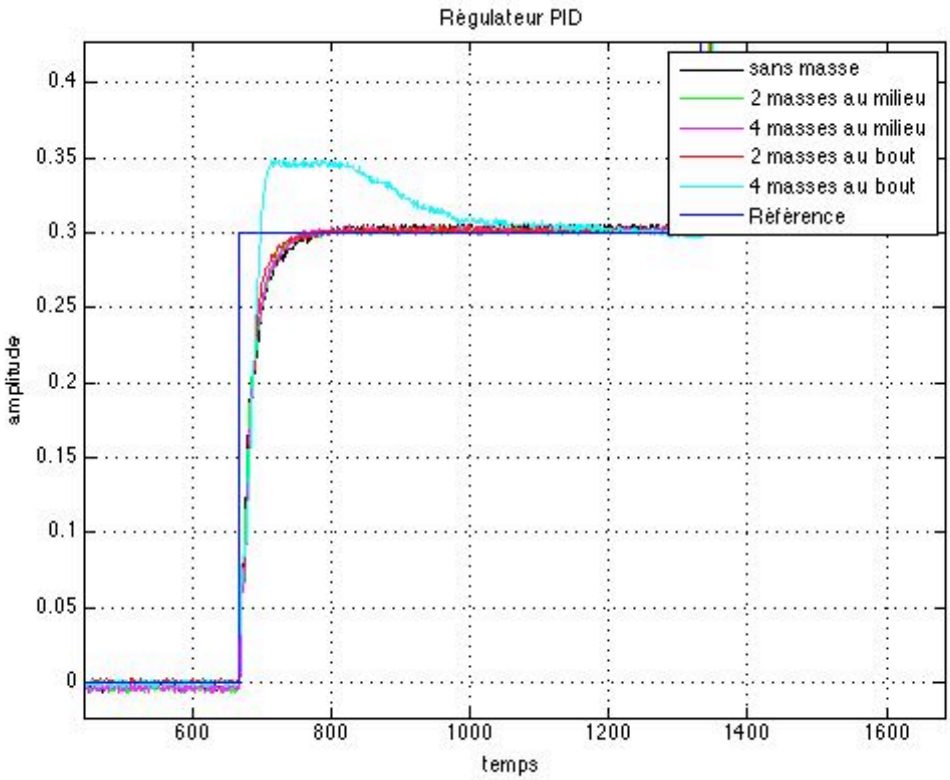
- Le gain A=1.1
- La fréquence de coupure w_x=5.5 [rad/s]
- La constante de temps τ=0.22

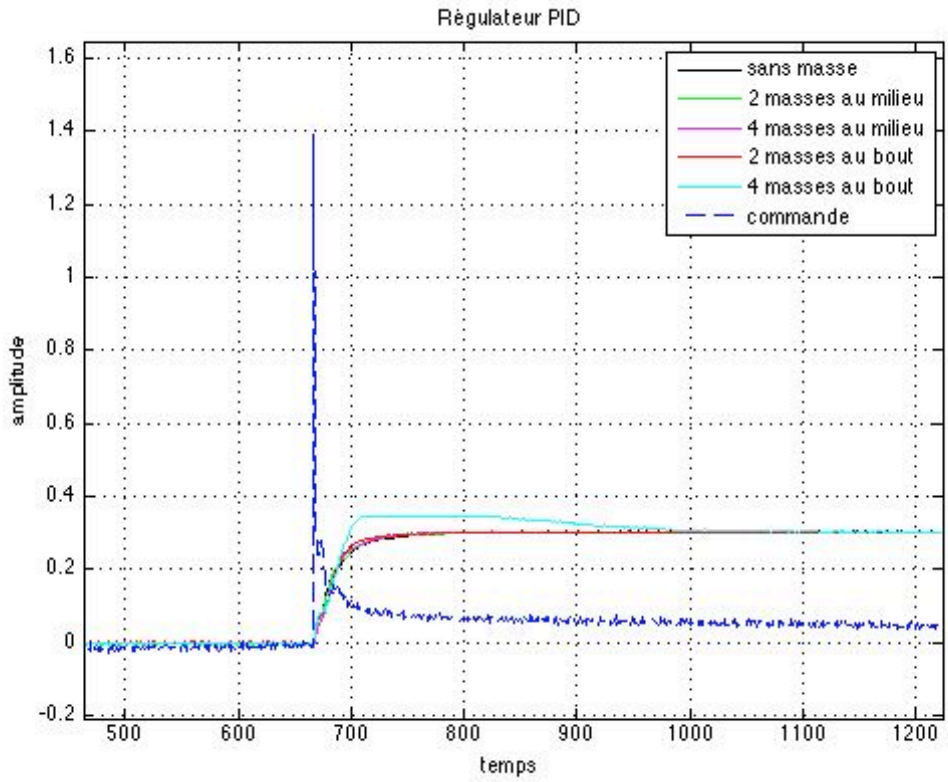
- Le gain du régulateur K_p=1.267
- La constante de dérivation du régulateur Td=0.0599
- La constante d'intégration du régulateur Ti=1.3981

Qui nous donne la fonction de transfert suivante :

$$K(s) = 1.276(1 + \frac{1}{1.3981s} + \frac{0.0599s}{0.007s+1})$$

Les résultats obtenus avec ce régulateur sont représentés sur les graphes suivants :





Nous observons sur le premier graphe ci-dessus que le statisme a disparu et que le régulateur satisfait les contraintes de robustesse que nous lui avons soumises.
Il est à noter aussi que dans le cas de la réponse du système avec quatre masses positionnées au bout du bras, le régulateur prend un peu de temps avant de faire diminuer le statisme. En effet, en observant le 2e graphe, lorsque le signe de l'écart entre la valeur de consigne et le grandeur de commande est important durant une longue période temporelle, une saturation des éléments en aval du régulateur est à prévoir. Afin de « vider » l'intégrateur, un laps de temps est donc requis comme, nous l'observons dans la figure ci-dessus. Ce comportement est appelé *emballement* ou *saturation de l'intégrateur*, en anglais *reset windup. [3]*
Afin d'obtenir une meilleure réponse, une mesure anti-emballement peut-être implémentée sur le système.

Le régulateur RST

Le calcul du régulateur RST s'accompagne d'une difficulté supplémentaire. En effet, vu que le régulateur RST possède plus de degrés de liberté que le régulateur PID, des contraintes plus strictes peuvent lui être imposées.
Nous allons donc définir W_1 avec des contraintes sur le setting time et l'overshoot de la réponse :

- Setting time vaut $\frac{4.6}{\zeta w_n}$ et l'overshhot est donné par $exp(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$

À l'aide des fonctions ci-dessus, nous allons pouvoir calculer les paramètres ζ et w_n. Ainsi nous allons calculer la fonction de sensibilité complémentaire :

$$T_{id} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta s + w_n^2}$$

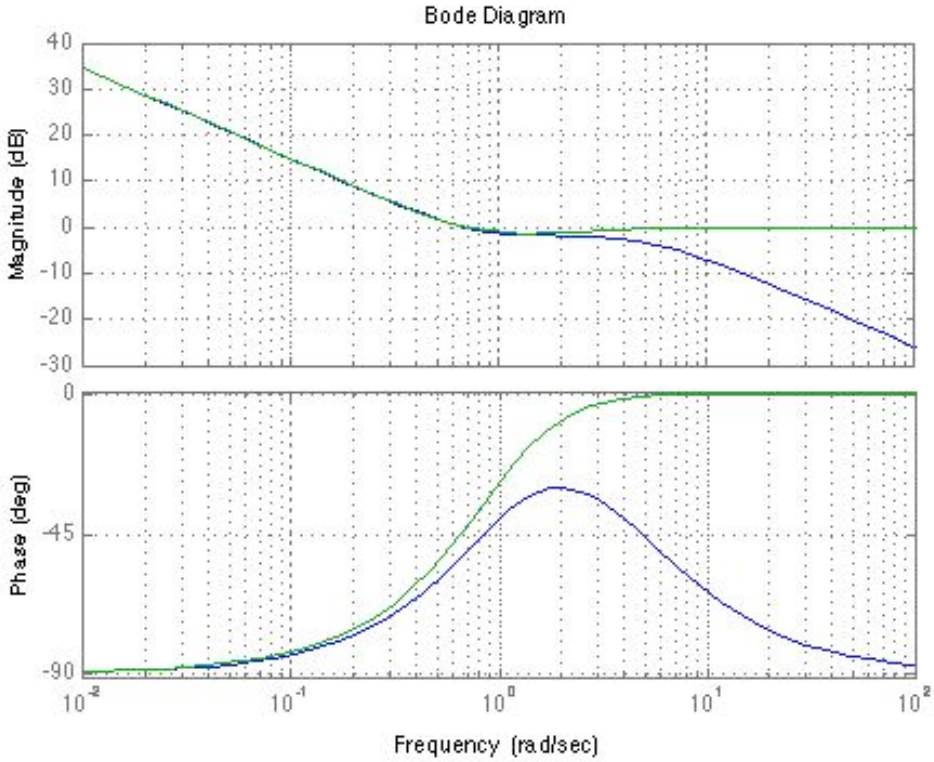
Nous connaissons la relation suivante qui lie la fonction de sensibilité complémentaire à la fonction de sensibilité :

$$S_{id}=1-T_{id}=W_1^{-1}$$

Ainsi notre nouveau filtre aura la forme suivante:

$$W_1(s) = \frac{s^2 + w_n\zeta s + 1}{s(s + w_n\zeta)}$$

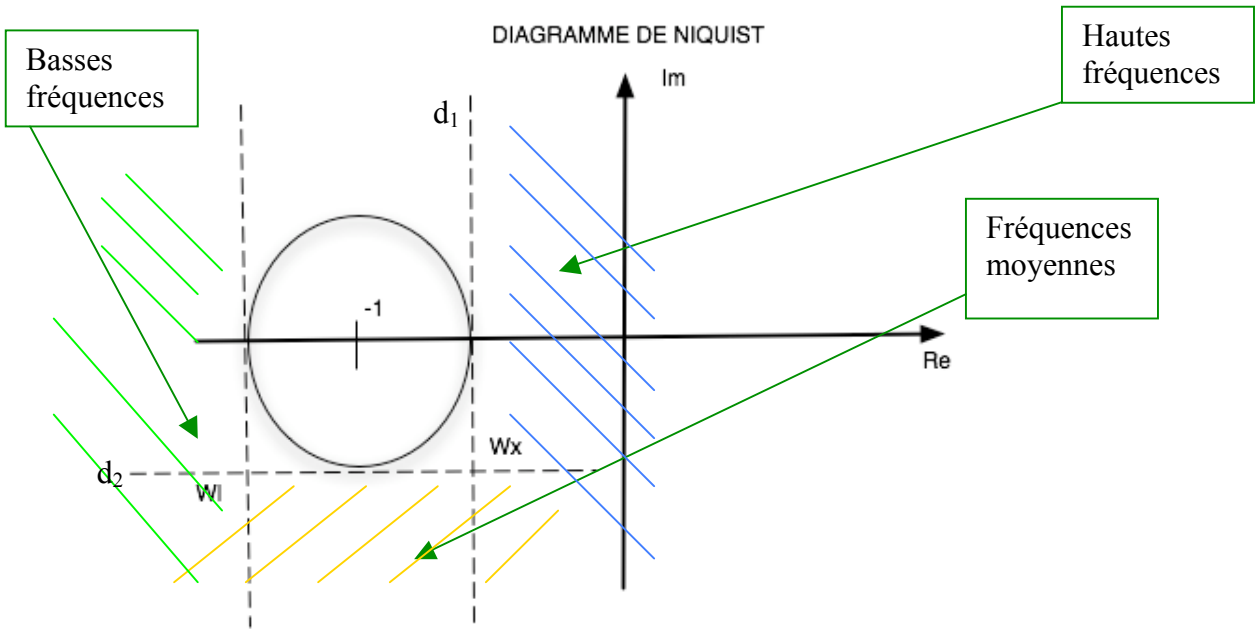
Seul un problème subsiste avec cette fonction. En effet en traçant le diagramme de Bode de W_1, nous observons que son amplitude est zéro lorsque w tend vers l'infini, ce qui vend dire que le rayon de son cercle ne sera jamais plus petit que 1 et ne laissera donc pas passer le diagramme de Nyquist du régulateur passer entre l'axe des Réel et le point –1. C'est la raison pour laquelle nous allons rendre cette fonction strictement propre en la divisant par (αs+1) , α représentant la fréquence à laquelle le rayon de W_1 deviendra plus petit que 1 comme le représente la figure suivante.



W_1 (en bleu ci-dessus) devient donc :

$$W_1(s) = \frac{s^2 + w_n\zeta s + 1}{s(s + w_n\zeta)(\alpha s + 1)}$$

Ainsi comme pour le régulateur PID, nous allons définir trois zones dans lesquelles le diagramme de Nyquist du régulateur pourra passer. Ces trois zones sont représentées dans la figure ci-dessous.

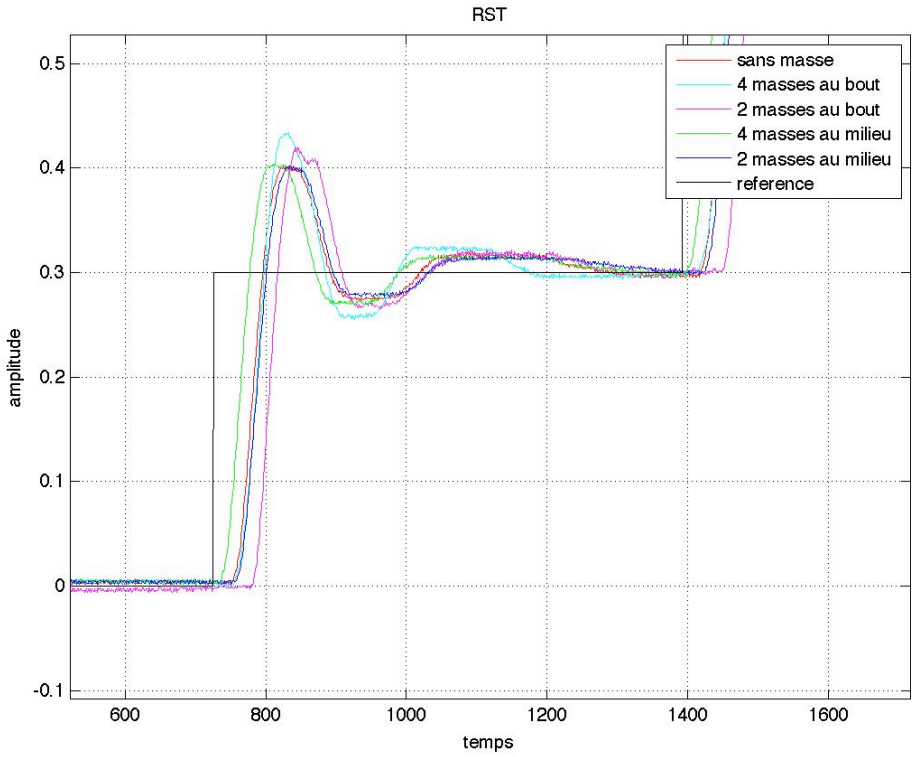


Les paramètres obtenus avec cette méthode sont les suivants :

- La fréquence de coupure w_x=10 [rad/s]
- La fréquence « basse fréquence » w_l= 1 [rad/s]
- Le degré du polynôme S(z) n=4
- α=0.2
- Setting time = 5 secondes
- Overshoot= 10%
- ζ=0.58 & w_n=1.55 [rad/s]

Ce qui nous donne la fonction de transfert suivante :

$$K(z) = \frac{3.2454 - 5.6918z^{-1} + 9.4992z^{-2} - 13.773z^{-3} + 6.7331z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$



Nous observons sur la figure ci-dessus que le régulateur est très robuste. En effet, il se comporte de manière très similaire indépendamment de la position et du nombre de masse. Par contre, nous observons un overshoot bien supérieur à celui que nous avons choisi. Cela vient peut-être du fait que nous avons dû rendre W_1 strictement propre afin de trouver un régulateur qui satisfasse les contraintes que nous avons choisies. Si nous avions pu trouver un régulateur qui satisfasse les contraintes soumises par W_1 non-modifié, nous n'aurions peut-être pas ce défaut, mais les contraintes soumises par ce W_1 ne peuvent pas être satisfaites pour notre système.

V. Conclusion

Durant ce travail, nous avons tout d'abord identifié le système afin de détecter ses sensibilités. En effet, le but étant de tester un régulateur robuste, nous avons veillé à travailler avec des réponses fréquentielles bien différentes les unes des autres. Il s'est trouvé que le système est sensible aux nombres de masses, mais aussi à leurs positions pour autant qu'elles ne s'approchent pas trop du centre de rotation.

En observant le diagramme de Bode des différents modèles non-paramétriques, nous avons conclu que le système possède un intégrateur, c'est la raison pour laquelle, nous avons en premier lieu choisi de dimensionner un régulateur PD. Malheureusement un statisme prononcé subsistait, peut être parce que certaines perturbations interviennent après le régulateur. C'est pourquoi, afin d'éliminer ce statisme, nous avons dimensionné un régulateur PID. Cette fois ci en revanche, le statisme à disparu et le régulateur ainsi obtenu satisfait les contraintes que nous lui avons soumises. En dernier lieu, nous avons donc calculé un régulateur RST, qui dispose de plus de degrés de liberté que le régulateur PID, ainsi nous avons pu mettre des contraintes plus exigeantes. À nouveau, le régulateur calculé semble répondre à nos attentes. En effet, quelque soit le nombre de masses et leurs positions, le régulateur semble réagir de la même manière, ce qui fait de lui le régulateur robuste.

Ainsi, nous pouvons affirmer que la méthode fonctionne bien, malgré que nous ne puissions pas optimiser le polynôme R(z) du régulateur RST.
C'est une méthode facile à appliquer et ne requiert que les modèles non-paramétriques du système.
Côté simulation, les régulateurs obtenus avec cette méthode n'ont jamais été instables, même lorsque des fortes perturbations extérieures (perturbation à la main) lui ont été soumises. Nous pouvons néanmoins améliorer certains résultats, en particulier la simulation par step pour le régulateur PID en implémentant une mesure *anti-emballement*.
Il faudrait par la suite tester la méthode sur des systèmes encore plus incertains pour voir où sont limites de la méthode et voir si elle se prête à tous les cas de figure.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à faire ce travail et tout particulièrement Gorka qui a fait preuve d'une grande disponibilité pour me guider et répondre à mes questions.

28 Juin 2007 Christina Natterer

VI. Sources

[1] Gorka Galdos, Alireza Karimi and Roland Longchamp. Robust Loop Shaping Controler Design for Spectral Models by Quadratic Programming

[2] Prof. D. Bonvin, Dr A. Karimi. *Identification de systèmes dynamiques.* Presses polytechniques et universitaire romandes, octobre 2006

[3] Roland Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques.* Presses polytechniques et universitaire romandes, 2006