

# I. Méthode du Premier Harmonique (2ème partie)

# II. Introduction à la Méthode de Lyapunov

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

## Leçon 4

- 1 Système en rétroaction
- 2 Conditions pour la présence d'un cycle limite
- 3 Détermination approximative de  $A$  et  $\omega$
- 4 Croisement et Stabilité
  - Théorème des résidus
  - Critère de Nyquist
- 5 Fiabilité de l'analyse par le premier harmonique
- 6 Point d'équilibre
- 7 Stabilité pour les systèmes linéaires
- 8 Définition intuitive de la stabilité
- 9 Définition formelle de la stabilité
  - Notion de distance
  - Stabilité au sens de Lyapunov
  - Instabilité
  - Stabilité asymptotique

## Système en rétroaction

L'entrée  $u$  est égale à l'opposé de la sortie  $z$  :

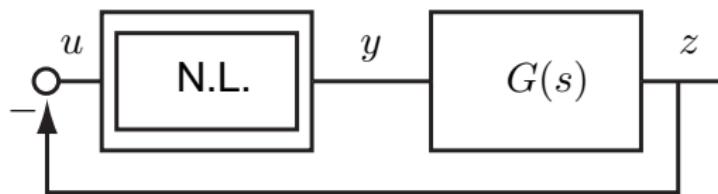


FIG.:  $u(t) = -z(t)$ .

## Conditions pour la présence d'un cycle limite

Équations des éléments de la boucle :

$$y(t) = \phi(u(t)) \quad (1)$$

$$z(t) = \int_0^t y(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (2)$$

$$u(t) = -z(t), \quad (3)$$

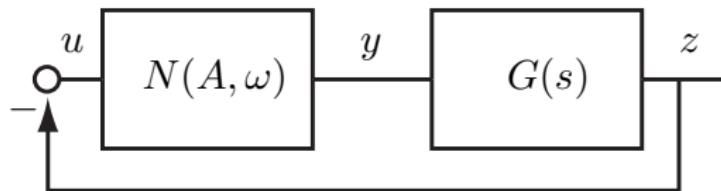
où  $g(\cdot)$  représente la réponse impulsionnelle de  $G(s)$ .

Équivalent à déterminer le point fixe  $z(\cdot)$  de l'équation intégrale :

$$z(t) = \int_0^T \phi(-z(\tau))g(t - \tau)d\tau \quad (4)$$

Paramètres  $A$  et  $\omega$  du cycle limite :

Gain équivalent et système linéaire en boucle fermée :

Condition sur  $N(A)$  et  $G(j\omega)$  :

$$Y(j\omega) = N(A, \omega)U(j\omega) \quad (5)$$

$$Z(j\omega) = G(j\omega)Y(j\omega) \quad (6)$$

$$U(j\omega) = -Z(j\omega). \quad (7)$$

$$Z(j\omega) = -G(j\omega)N(A, \omega)Z(j\omega) \quad (8)$$

## Croisement et Stabilité

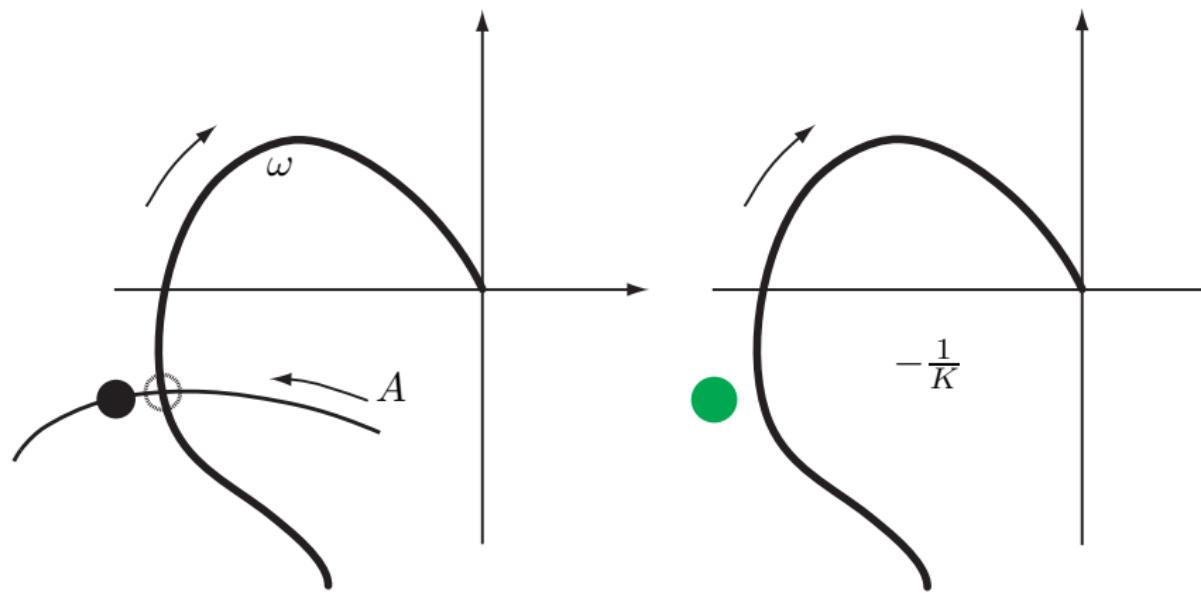


FIG.: Illustration d'une prévision de la présence d'un cycle limite stable.

## Croisement et Stabilité

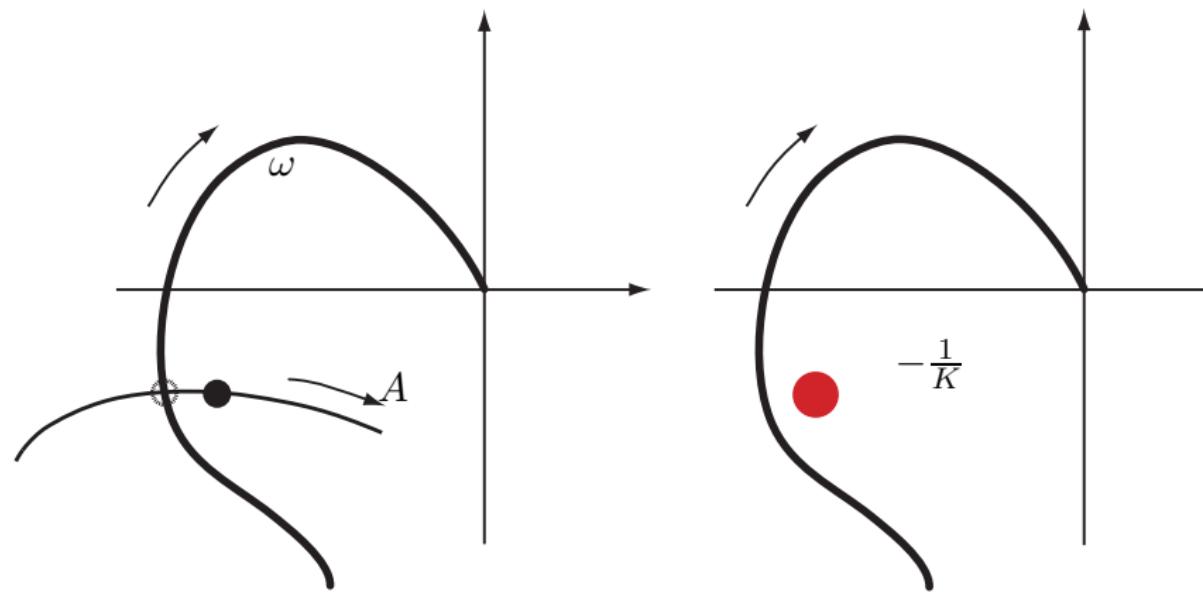


FIG.: Illustration d'une prévision de la présence d'un cycle limite instable.

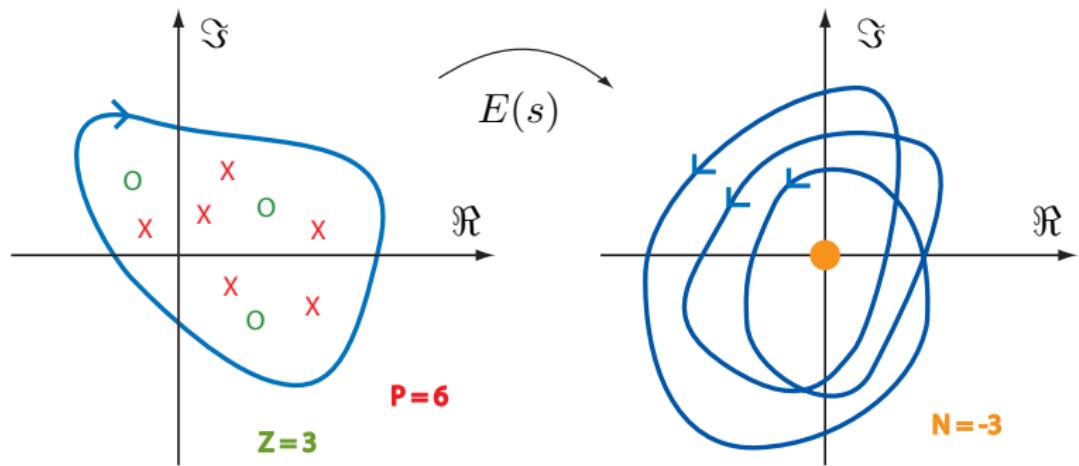
Théorème des résidus :  $N = Z - P$ 

FIG.: Nbr. de zeros :  $Z = 3$ ; Nbr. de pôles :  $P = 6$ ; Nombre de tours :  $N = Z - P = -3$ , 3 tours dans le sens contraire.

## Critère de Nyquist

Conséquence du th. des résidus lorsque :

$$E(s) = 1 + G(s)H(s)$$

### Théorème

- 1 On prend l'axe *imaginaire* du plan  $s$ , c.-à-d.  $j\omega$ ,  $\omega \in [-\infty; \infty]$ .
- 2 On prend son *image* par  $G(s)H(s)$
- 3  $N = \text{nbr de fois que } G(j\omega)H(j\omega) \text{ encercle } -1$  (sens trig. -).
- 4  $P = \text{nbr de pôles de } G(s)H(s) \text{ instables}$   
( $\equiv$  pôles instables de  $1 + G(s)H(s)$ )

$$Z = N + P = \text{nbr de pôles inst. de la boucle fermée}$$

(zéros inst. de  $1 + G(s)H(s)$ )

## Fiabilité de l'analyse par le premier harmonique

### Attention !

- amplitude et fréquence prédictes ne sont pas exactes
- un cycle limite prévu ne se produit pas
- un cycle limite existant n'est pas prédict

## Point d'équilibre

### Point pour lequel $\dot{x} = 0$

Soit un système donné sous la forme

$$\dot{x} = f(x),$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente l'état. Un point d'équilibre est une valeur de l'état  $\bar{x}$  telle que lorsque l'argument  $x$  de  $f(x)$  est remplacé par  $\bar{x}$ , alors  $f(x)$  s'annule :

$$\dot{x} = 0 = f(\bar{x}).$$

## Stabilité pour les systèmes linéaires

Soit  $\dot{x} = Ax + Bu$  avec  $u = -Kx$  :

$$\dot{x} = (A - BK)x = \tilde{A}x$$

$|\tilde{A}| \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$  est un point d'équilibre unique

### Critère de stabilité (syst. linéaire)

$\dot{x} = \tilde{A}x$  stable asymptotiquement  $\Leftrightarrow \Re(\lambda_i(\tilde{A})) < 0$

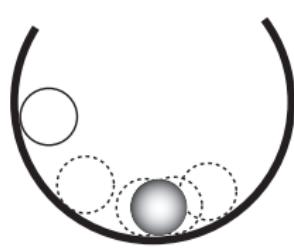
$\dot{x} = \tilde{A}x$  stable  $\Leftrightarrow \Re(\lambda_i(\tilde{A})) \leq 0$

et les blocs de Jordan, pour  $\lambda = 0$ , sont de dim. 1

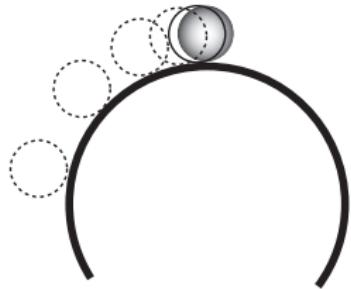
## Définition intuitive de la stabilité

### Définition intuitive de la stabilité

Si le système est initialement "légèrement" perturbé de son point d'équilibre le système reste "proche" de ce point d'équilibre.



stable



instable

FIG.: Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

## Notion de distance

Il faut rendre mathématiquement précis ce que l'on entend par "proche" et "légèrement".

### Définition de la norme

Un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  est dit *normé* lorsqu'il existe une fonction  $x \rightarrow \|x\|$  de  $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- ①  $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathcal{V}$ ; et  $\|x\| = 0$  seulement lorsque  $x = 0$ .
- ②  $\|cx\| = |c|\|x\|, \forall c \in \mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathcal{V}$ .
- ③  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathcal{V}$ .

## Notion de distance

### Exemples

Dans un espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , les normes suivantes sont définies :

- ①  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- ②  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- ③  $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n x_i$

avec  $x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

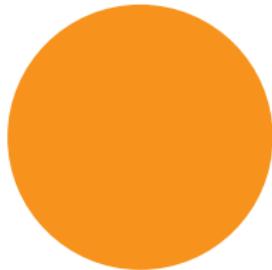
## Stabilité : définition formelle

Stabilité au sens de Lyapunov :

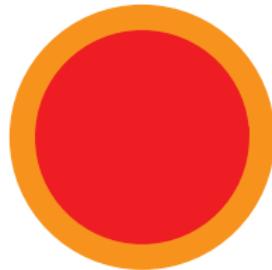
Le point d'équilibre  $x = 0$  est stable lorsque

$\forall R > 0, \exists r > 0$  tel que  $\forall x_0, \|x_0\| < r$ , il est vrai que

$$\|\mathcal{X}(x_0, t)\| < R, \quad \forall t \geq 0.$$



(i)



(ii)



(iii)

FIG.: (i)  $\forall R > 0$ ; (ii)  $\exists r > 0$ ; (iii)  $\forall x_0, \|x_0\| < r$ , implique  $\|\mathcal{X}(x_0, t)\| < R$ .

## Instabilité

### Définition d'un système instable

Un système est instable au sens de Lyapunov lorsque il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

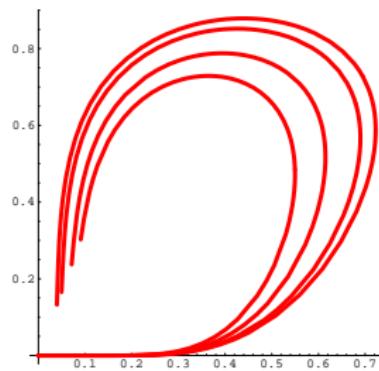
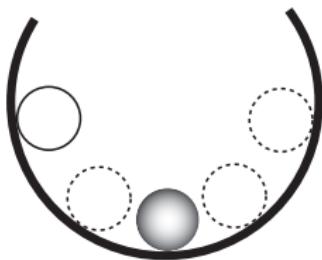
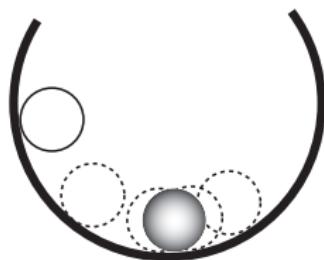


FIG.: Exemple d'un système convergent mais instable.

## Stabilité asymptotique



sans frottement



avec frottement

FIG.: A gauche stabilité. A droite, stabilité asymptotique.

### Définition de la stabilité asymptotique

- 1 Le point d'équilibre est stable au sens de Lyapunov. (stabilité)
- 2 Il existe une boule de taille  $r_0$  telle que  $\forall x_0, \|x_0\| < r_0$  implique que  $\mathcal{X}(x_0, t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . (convergence asymptotique).