Linéarisation par bouclage et changement de coordonnées

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

1. Linéarisation exacte
   - Présence d'une sortie
   - Chaîne d'intégrateurs
   - Equation d'erreur et stabilisation de la chaîne d'intégrateurs
   - Conditions sur la sortie
2. Outils géométriques
   - Dérivée de Lie
   - Conditions sur la sortie en utilisant la dérivée de Lie
   - Crochet de Lie
   - Conditions équivalentes

Linéarisation exacte

Soit le système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

On va chercher à déterminer :

- Un bouclage $v = \alpha(x) + \beta(x)u$.
- Un changment de coordonnées $z = \Phi(x)$.

Afin d'obtenir :

$$\dot{z} = Az + Bv$$

Présence d'une sortie

Système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Principe : dériver la sortie jusqu'à apparition de l'entrée.

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x}\left(f(x) + g(x)u\right)$$

Si $\frac{\partial h}{\partial x} g(x) = 0$, on continue à dériver, c.-à-d. $\ddot{y} =$ ..., etc.

Chaîne d'intégrateurs

On finit par obtenir un certain r tel que :

$$y^{(r)} = \alpha(x) + \beta(x)u = v$$

C'est une chaîne d'intégrateurs.

Equation d'erreur et stabilisation

Chaîne d'intégrateurs

$$y^{(r)} = v$$

Polynôme caractéristique

$$A(s) = \Pi_{i=1}^{r}(s - \lambda_i) = s^r + a_1 s^{r-1} + a_2 s^{r-2} + \ldots + a_r$$

Equation d'erreur et stabilisation

Equation d'erreur

$$e = y_c - y$$

$$A(s)E(s) = s^r E(s) + a_1 s^{r-1} E(s) + \ldots + a_r E(s) = 0$$

$$e^{(r)} + a_1 e^{(r-1)} + \ldots + a_{r-1}\dot{e} + a_r e = 0$$

Loi de commande pour la chaîne d'intégrateurs

$$v = y^{(r)} = y_c^{(r)} + a_1(y_c^{(r-1)} - y^{(r-1)}) + \ldots + a_{r-1}(\dot{y}_c - \dot{y}) + a_r(y_c - y)$$

Conditions sur la sortie

Sortie inconnue

- Déterminer un $h(x)$ particulier tel qu'en posant $y = h(x)$....
- ...et en dérivant cette sortie, on arrive à une taille maximale $r = n$, c.-à-d.

$$y^{(n)} = v$$

Outils géométriques

Ecriture plus succinte :

- première dérivée,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = \frac{\partial h}{\partial x}f(x) + \frac{\partial h}{\partial x}g(x)u \\ \dot{y} &= L_f h(x) + L_g h(x)u \end{aligned}$$

- seconde dérivée,

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \\ &= L_f L_f h(x) + L_g L_f h(x)u, \end{aligned}$$

- etc,...

$$y^{(n)} = L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x)u$$

Dérivée de Lie

Définition

La dérivée de Lie d'une fonction $h(x)$ le long d'un champ de vecteur $f(x)$ est donnée par :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Exemple, dérivée de la fonction de Lyapunov :

$$\dot{V} = L_f V$$

Conditions sur la sortie en utilisant la dérivée de Lie

Conditions sur $h(x)$:

$$\begin{array}{rcl} L_g h(x) & = & 0 \\ L_g L_f h(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ L_g L_f^{n-2} h(x) & = & 0 \end{array}$$

Conditions sur la sortie en utilisant la dérivée de Lie

Obtention du changement de coordonnées :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \phi_1(x) = h(x) \\
z_2 &= \phi_2(x) = L_f h(x) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
z_n &= \phi_n(x) = L_f^{n-1} h(x) \\
\\
z &= \Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \ldots & \phi_n(x) \end{pmatrix}^T
\end{aligned}
$$

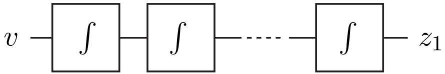
Conditions sur la sortie en utilisant la dérivée de Lie

Obtention du bouclage :

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_n &= L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u = \alpha(x) + \beta(x) u \\
\\
\alpha(x) &= L_f^n h(x) \\
\beta(x) &= L_g L_f^{n-1} h(x)
\end{aligned}
$$

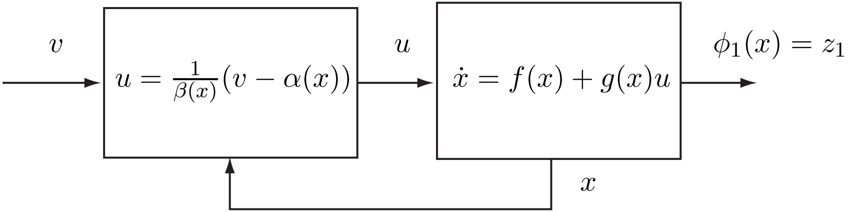
Système linéaire équivalent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Système équivalent par bouclage

Le bouclage transforme le système en une chaîne d'intégrateurs :



Crochet de Lie

Définition

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Conditions équivalentes

Propriété

$$L_{[f,g]}h(x) = L_f L_g h(x) - L_g L_f h(x)$$

Astuce :

$$L_g h(x) = 0 \Rightarrow L_f L_g h(x) = 0$$

$$L_g L_f h(x) = L_g L_f h(x) - L_f L_g h(x) = -L_{[f,g]}h(x) = -\frac{\partial h}{\partial x}[f,g] = 0.$$

En suivant un raisonnement similaire :

$$\frac{\partial h}{\partial x}[f,[f,g]] = 0$$

Conditions sur le gradient

Conditions sur $h(x)$ (rappel) :

$$\begin{array}{rcl} L_g h(x) & = & 0 \\ L_g L_f h(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ L_g L_f^{n-2} h(x) & = & 0 \end{array}$$

Conditions équivalentes sur le gradient :

En généralisant l'astuce :

$$\frac{\partial h}{\partial x} \begin{pmatrix} g & [f, g] & [f, [f, g]] & \dots & ad_f^{n-2} g \end{pmatrix} = 0$$