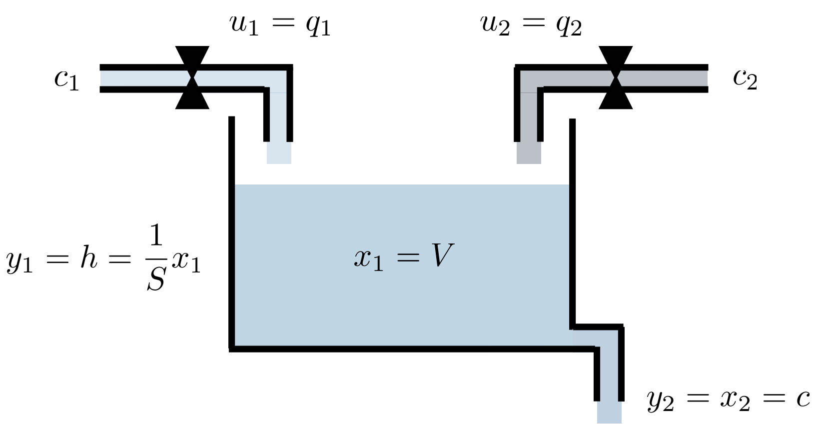
Cuve de mélange



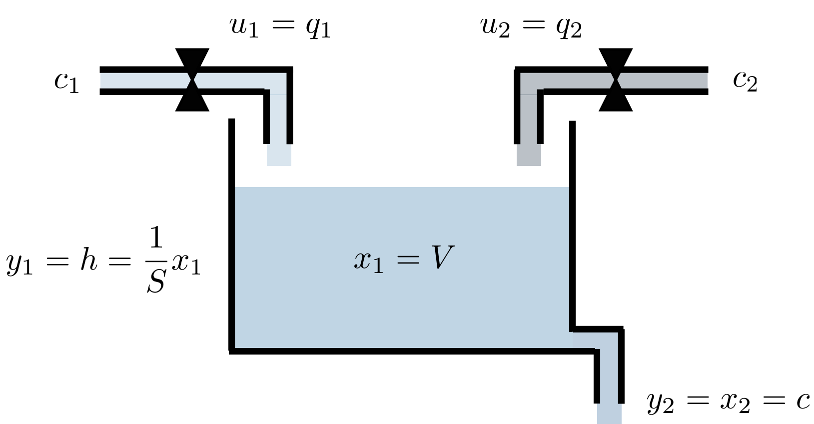
$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) - K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}} \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{x_1(t)} \left\{ \left[c_1 - x_2(t)\right] u_1(t) + \left[c_2 - x_2(t)\right] u_2(t) \right\} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} y_1(t) = \frac{1}{S} x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{array} \right.$$

$$\tilde{u}(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \tilde{x}(k)$$

Nous avons vu sa commande par placement des valeurs propres, optimale et LQR après linéarisation par la tangente

C'est aussi possible de faire du découplage non linéaire

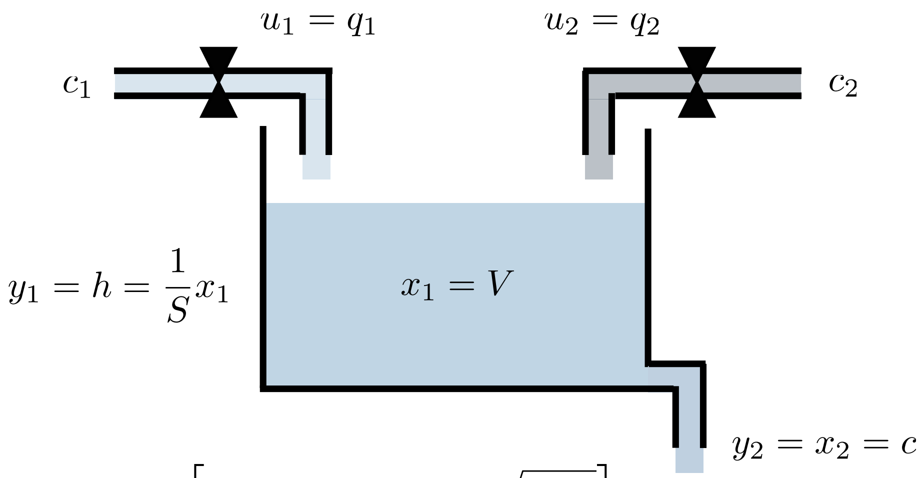
Cuve de mélange: Modèle inverse



$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) - K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}} \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{x_1(t)} \left\{ \left[c_1 - x_2(t)\right] u_1(t) + \left[c_2 - x_2(t)\right] u_2(t) \right\} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} y_1(t) = \frac{1}{S} x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = \frac{1}{S} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{S} \left[u_1(t) + u_2(t) - K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}} \right] \equiv w_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{1}{x_1(t)} \left\{ \left[c_1 - x_2(t)\right] u_1(t) + \left[c_2 - x_2(t)\right] u_2(t) \right\} \equiv w_2(t) \end{array} \right.$$

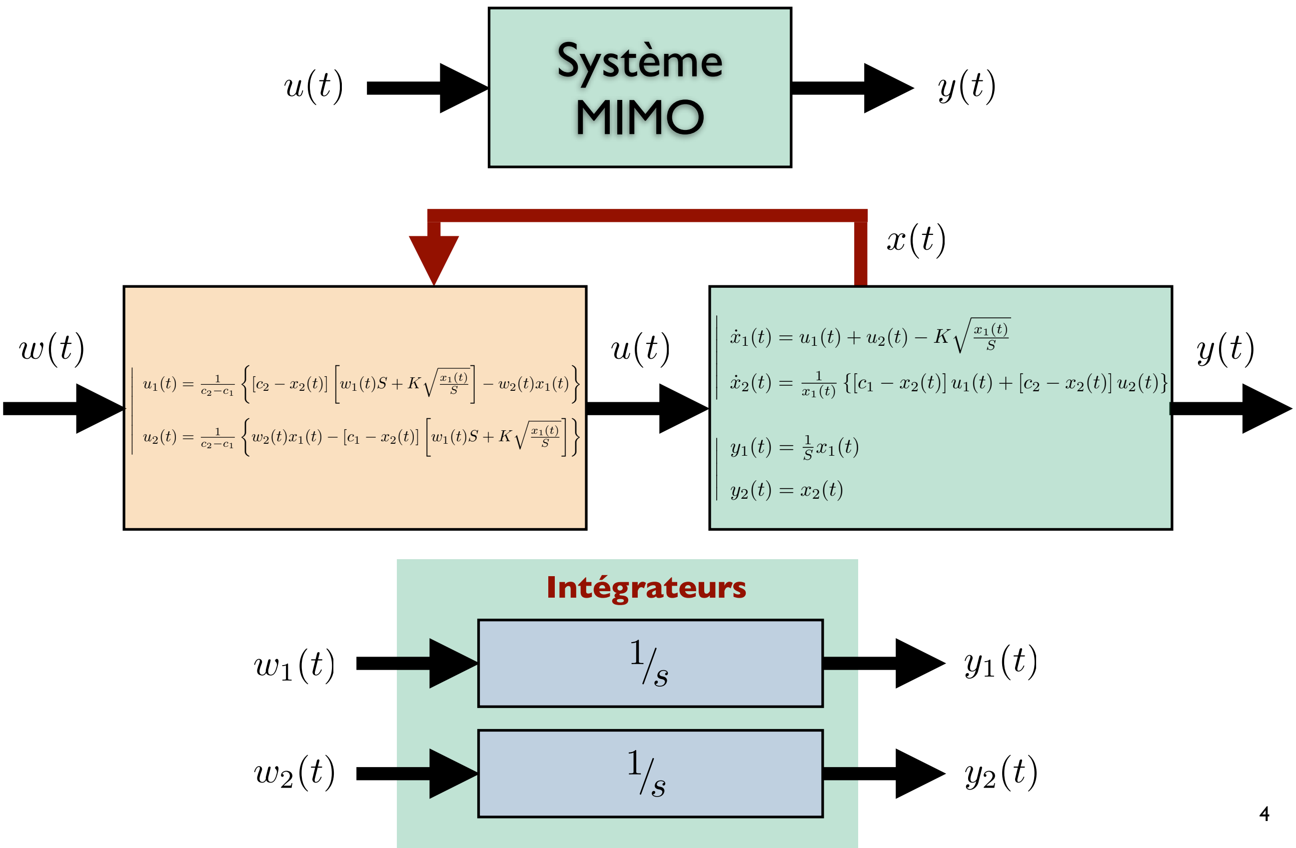
Cuve de mélange: Modèle inverse



$$\left| \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = \frac{1}{S}\dot{x}_1(t) = \frac{1}{S}\left[u_1(t) + u_2(t) - K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}}\right] \equiv w_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{1}{x_1(t)}\left\{[c_1 - x_2(t)]\,u_1(t) + [c_2 - x_2(t)]\,u_2(t)\right\} \equiv w_2(t) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} u_1(t) = \frac{1}{c_2 - c_1}\left\{[c_2 - x_2(t)]\left[w_1(t)S + K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}}\right] - w_2(t)x_1(t)\right\} \\ u_2(t) = \frac{1}{c_2 - c_1}\left\{w_2(t)x_1(t) - [c_1 - x_2(t)]\left[w_1(t)S + K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}}\right]\right\} \end{array} \right.$$

Cuve de mélange: Modèle inverse



Implantation discrète

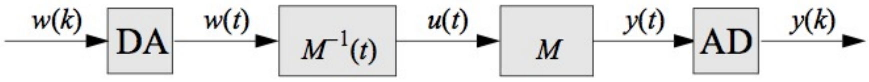


Figure 3-10 Système équivalent vu au travers de convertisseurs AD et DA.

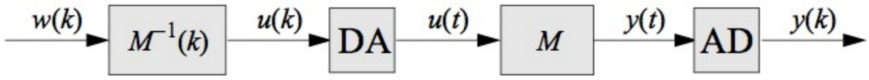
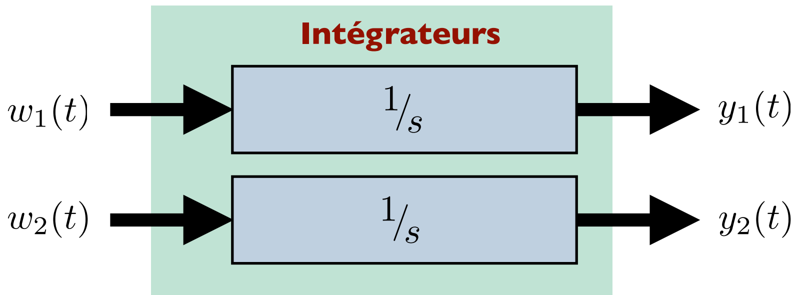


Figure 3-11 Schéma fonctionnel équivalent correspondant à l'implantation réelle.



$$\dot{y}_i(t) = w_i(t)$$
$$x_i(t) = y_i(t)$$
$$\dot{x}_i(t) = 0x_i(t) + 1w_i(t)$$

$$\Phi = e^{Ah} = e^0 = 1$$
$$\Gamma = \int_0^h e^{A\eta} d\eta B = \int_0^h d\eta B = h$$
$$x_i(k+1) = x_i(k) + hw(k)$$

DESCRIPTIF D'EXAMEN

Titre du cours: Systèmes multivariables

Enseignant: Dr D. Gillet, MER

Date et heure: Jeudi 20 janvier 2011, de 8h15 à 11h15, salle CM1 120

Documents de référence (polycopié, feuilles distribuées,..)

Polycopié Systèmes multivariables, édition Septembre 2010

Nature de l'examen

Écrit **Durée:** 3h00

Documents autorisés pendant l'examen

Tous

Chapitres

Chapitres 1 à 7, annexe A et Slides (inclus inégrateurs et estimation optimale)

Remarques sur le déroulement de l'examen

Pas de discussion
Pas d'échange de documents
Pas de téléphone
Pas d'ordinateur portable ni de PDA/Smartphone avec WiFi

Bonus

0.5 pt pour un rapport accepté sur la dernière séance d'étude de cas.

Sélection des variables d'état
Selection of the state variables

$$\begin{aligned} a\dddot{\omega}(t) + \sin \dot{z}(t) &= u_1^2(t) \\ \sqrt{\dot{v}(t)} + \cos \dot{z}(t) &= u_2(t) \\ \dot{z}(t) &= \alpha t \end{aligned}$$

i	grandeurs γ_i	ordres ρ_i	variables d'état
1	v	1	$x_1 = v$
2	w	2	$x_2 = w, x_3 = \dot{w}$
3	z	1	$x_4 = z$

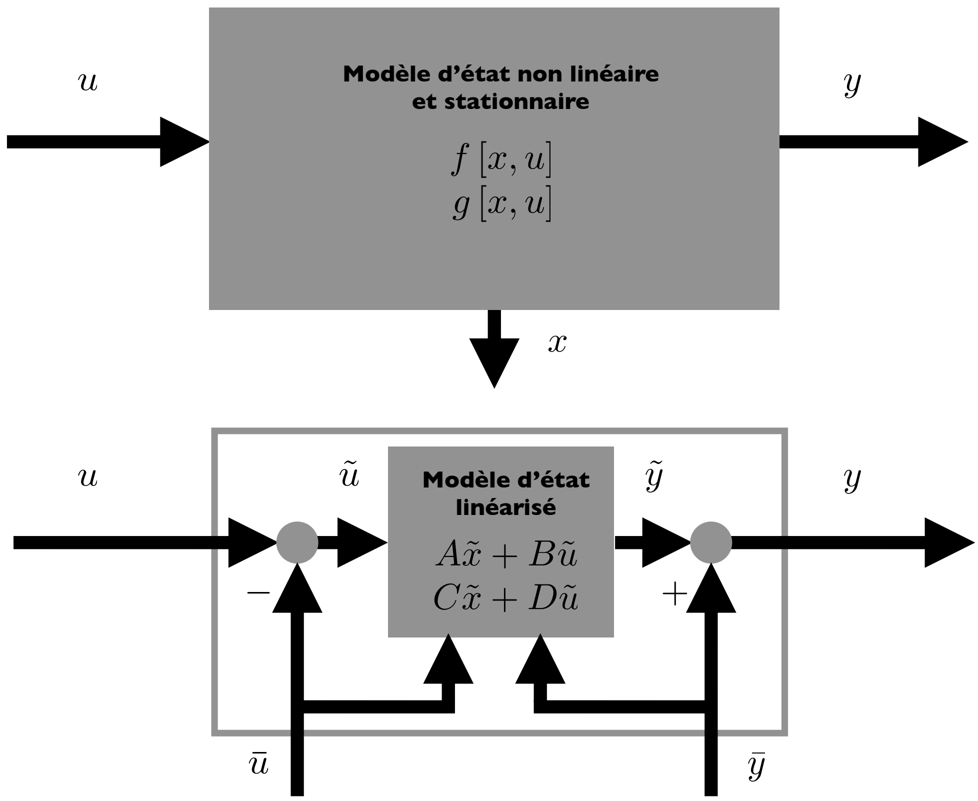
$$n = \sum_{i=1}^{n_\gamma} \rho_i$$

Ne pas prendre en considération les dérivées des entrées

Modèle d'état/State-space Model

	Analogique/Continuous	Discret/Discrete
Non linéaire Nonlinear	$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ $y(t) = g[x(t), u(t), t]$	$x(k+1) = f[x(k), u(k), k]$ $y(k) = g[x(k), u(k), k]$
Linéaire Linear	$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$	$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k)$ $y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$
Linéaire et stationnaire Linear and time-invariant	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t) + Du(t)$	$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$ $y(k) = Cx(k) + Du(k)$

Résumé linéarisation par la tangente



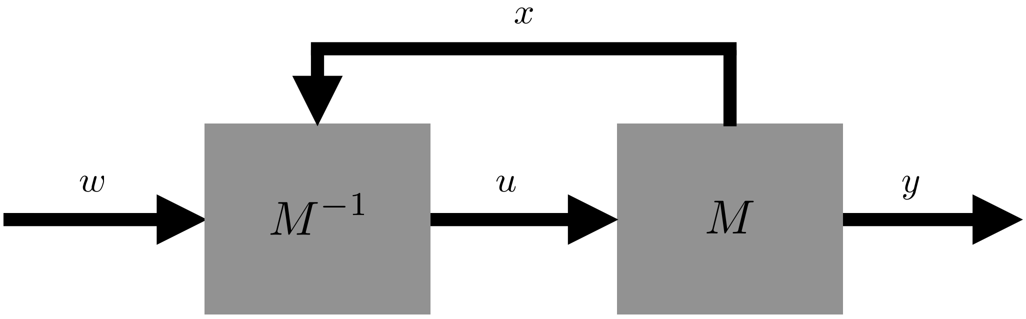
Résumé linéarisation par la tangente

	Analogique	**Discret**
Non linéaire	$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$ $y(t) = g[x(t), u(t), t]$	$x(k+1) = f[x(k), u(k), k]$ $y(k) = g[x(k), u(k), k]$
Trajectoire nominale	$\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ $\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ $\dot{\bar{x}}(t) = f[\bar{x}(t), \bar{u}(t)]$ $\bar{y}(t) = g[\bar{x}(t), \bar{u}(t)]$	$\tilde{x}(k) = x(k) - \bar{x}(k)$ $\tilde{y}(k) = y(k) - \bar{y}(k)$ $\tilde{u}(k) = u(k) - \bar{u}(k)$ $\bar{x}(k+1) = f[\bar{x}(k), \bar{u}(k)]$ $\bar{y}(k) = g[\bar{x}(k), \bar{u}(k)]$
Point de fonctionnement	$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{\bar{x}} = 0$ $0 = f[\bar{x}, \bar{u}]$ $\bar{y} = g[\bar{x}, \bar{u}]$	$\bar{x}(k+1) = \bar{x}(k) = \bar{x} \qquad \forall k$ $\bar{x} = f[\bar{x}, \bar{u}]$ $\bar{y} = g[\bar{x}, \bar{u}]$
Modèle linéarisé	$\dot{\tilde{x}}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{u}(t)$ $\tilde{y}(t) = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{x}(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{u}(t)$	$\tilde{x}(k+1) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{x}(k) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{u}(k)$ $\tilde{y}(k) = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{x}(k) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{\bar{x},\bar{u}} \tilde{u}(k)$

Systèmes intrinsèquement linéaires

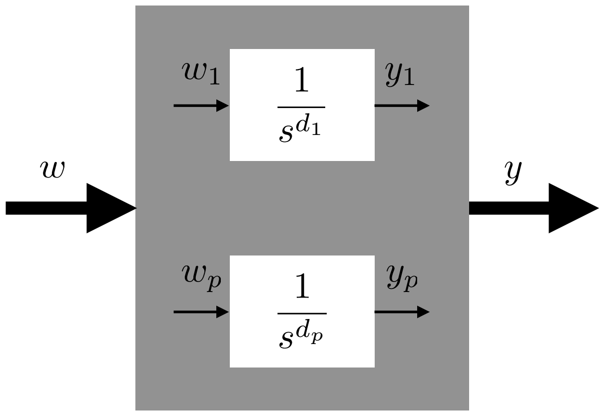
	Analogique	**Discret**
	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t) + Du(t)$	$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$ $y(k) = Cx(k) + Du(k)$
	$\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ $\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}(t)$	$\tilde{x}(k) = x(k) - \bar{x}(k)$ $\tilde{y}(k) = y(k) - \bar{y}(k)$ $\tilde{u}(k) = u(k) - \bar{u}(k)$
Point de fonctionnement	$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{\bar{x}} = 0$ $0 = A\bar{x} + B\bar{u}$ $\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$	$\bar{x}(k+1) = \bar{x}(k) = \bar{x} \qquad \forall k$ $\bar{x} = \Phi\bar{x} + \Gamma\bar{u}$ $\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$
	$\{\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}\} = \{0, 0, 0\}$	
	$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$	$\bar{x} = (I - \Phi)^{-1}\Gamma\bar{u}$
Modèle “linéarisé”	$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)$ $\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t)$	$\tilde{x}(k+1) = \Phi\tilde{x}(k) + \Gamma\tilde{u}(k)$ $\tilde{y}(k) = C\tilde{x}(k) + D\tilde{u}(k)$

Linéarisation par contre-réaction



$$y_i = g_i(x) \qquad i = 1, \ldots, p$$
$$\vdots$$
$$y_i^{(d_i)} = g_i^*(x, u) \quad d_i = 0, \ldots, \bar{d}_i$$

$$y_i^{(\bar{d}_i)} = w_i$$



Solution complète de l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

réponse libre + réponse forcée
(produit de convolution)

Discrétisation de systèmes stationnaires

<table>
<tr><th>Modèle linéaire</th><th colspan="2">Modèle non linéaire</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f\left[x(t), u(t)\right] \\ y(t) &= g\left[x(t), u(t)\right]\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Linéarisation</th></tr>
<tr><th>Contre-réaction</th><th>Tangente</th></tr>
<tr><td colspan="2">$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$</td><td>$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t)\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Discrétisation exacte $\Phi = e^{Ah}$ $\Gamma = \int_0^h e^{A\eta} d\eta \; B$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$</td><td>$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \Phi\tilde{x}(k) + \Gamma\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) &= C\tilde{x}(k) + D\tilde{u}(k)\end{aligned}$$</td></tr>
</table>

Systèmes discrets linéaires et stationnaires

Solution

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

$$x(k) = \underbrace{\Phi^{k-k_0} x(k_0)}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{\sum_{l=k_0}^{k-1} \Phi^{k-l-1} \Gamma u(l)}_{\text{Réponse forcée}}$$

Matrice de transfert et stabilité

$$Y(z) = \left[C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D\right] U(z) = H(z)U(z)$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & \dots & H_{1r}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{p1}(z) & \cdots & H_{pr}(z) \end{bmatrix} = \left[H_{ij}(z)\right] = \left[\frac{H_{ij}^*(z)}{\det(zI - \Phi)}\right]$$

Pôles z_i des H_{ij} solution de: $\det(zI - \Phi) = 0$

Valeurs propres v_i de Φ solution de: $\det(\lambda I - \Phi) = 0$

$$z_i = v_i$$

Asymptotiquement stable si: $|v_i| < 1$ pour $i = 1, \dots, n$

FT → Modèle d'état

$$w(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_w} w(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_w} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & \dots & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix}}_{c_w^T} w(k) + b_0 u(k)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}}$$

Modèle d'état physique → artificiel

$$G = \begin{bmatrix} Ig & \Phi g & \dots & \Phi^{n-1} g \end{bmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} e_n^T \Phi^{n-1} \\ e_n^T \Phi^{n-2} \\ \vdots \\ e_n^T I \end{bmatrix}$$

$w = Px$

$$w(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_w = P\Phi P^{-1}} w(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_w = Pg} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & \dots & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix}}_{c_w^T = c^T P^{-1}} w(k) + b_0 u(k)$$

$$\det(\lambda I - \Phi_w) = \det(\lambda I - \Phi) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n \lambda + a_n = 0$$

Modèle d'état physique → artificiel

$$Q = \begin{bmatrix} c^T I \\ c^T \Phi \\ \vdots \\ c^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \Phi^{n-1} e_n & \ldots & \Phi e_n & I e_n \end{bmatrix}$$

$x = Rv$

$$v(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_v \;=\; R^{-1}\Phi R} v(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix}}_{g_v \;=\; R^{-1} g} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c_v^T \;=\; c^T R} v(k) + \underbrace{b_0}_{d} u(k)$$

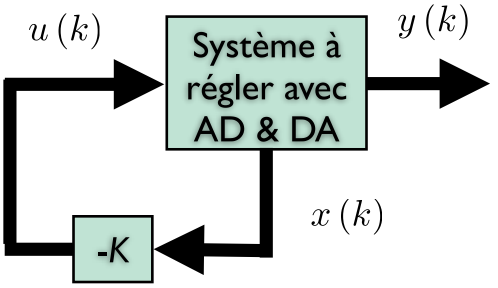
$$\det(\lambda I - \Phi_v) = \det(\lambda I - \Phi) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n \lambda + a_n = 0$$

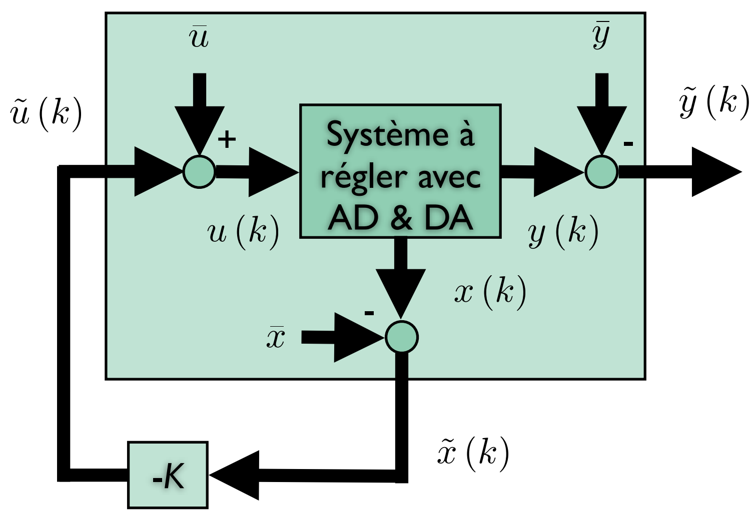
Commande d'état

Système à régler

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \Phi \tilde{x}(k) + \Gamma \tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) &= C \tilde{x}(k) + D \tilde{u}(k) \end{aligned}$$

Régulateur $\quad u(k) = -K x(k) \qquad \tilde{u}(k) = -K \tilde{x}(k)$





Résumé Commande d'état SIMO

Système à régler
$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + gu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Commande
$$u(k) = -Kx(k)$$

Système en boucle fermée (BF)
$$x(k+1) = (\Phi - gK)\, x(k) = \Phi_{BF} x(k)$$

$$\begin{aligned} \alpha_c(\lambda) \quad = \quad \det(\lambda I - \Phi_{bf}) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots \lambda a_{n-1} + \alpha_n \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Formule d'Ackermann

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} G^{-1} \alpha_c(\Phi) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ig & \mid & \Phi g & \mid & \ldots & \mid & \Phi^{n-1} g \end{bmatrix}^{-1} \alpha_c(\Phi) \end{aligned}$$

Gouvernabilité et observabilité

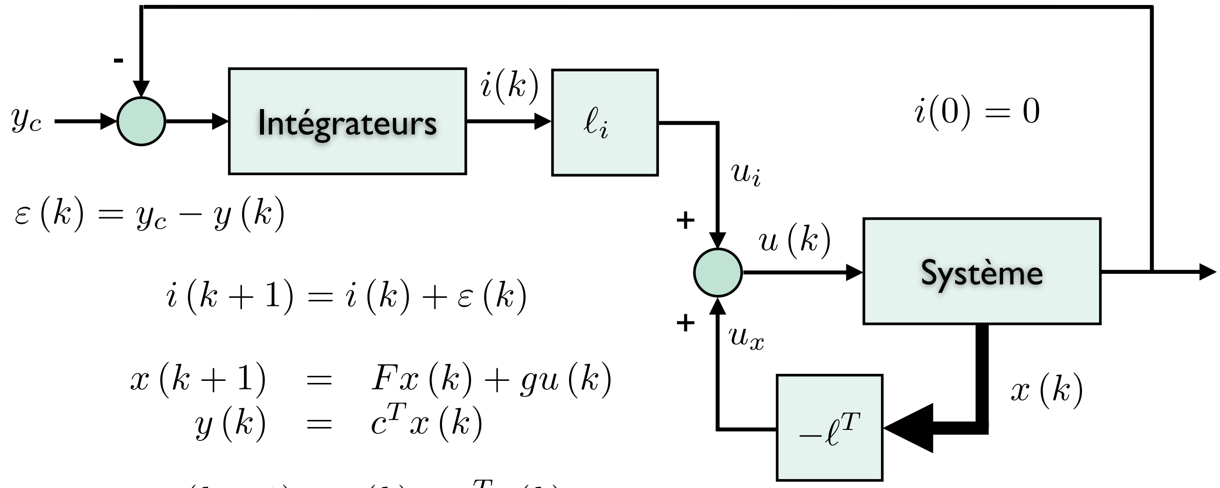
Un système est **gouvernable** ou **commandable** si et seulement si le rang de sa **matrice de gouvernabilité** ou **matrice de commandabilité** vaut n

$$G = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \ldots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nr}$$

Le système est ***observable*** si et seulement si le rang de la matrice d'observabilité suivante vaut n

$$Q = \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

Régulateur avec intégrateur (livre 14.3.3)



$$\varepsilon(k) = y_c - y(k)$$

$$i(k+1) = i(k) + \varepsilon(k)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + gu(k) \\ y(k) &= c^T x(k) \end{aligned}$$

$$i(k+1) = i(k) - c^T x(k) + y_c$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ i(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \\ -c^T & 1 \end{bmatrix}}_{F^*} \begin{bmatrix} x(k) \\ i(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}}_{g^*} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_c$$

$$u(k) = -\underbrace{\begin{bmatrix} \ell^T & \ell_i \end{bmatrix}}_{\ell^{T*}} \begin{bmatrix} x(k) \\ i(k) \end{bmatrix} = u_x + u_i$$

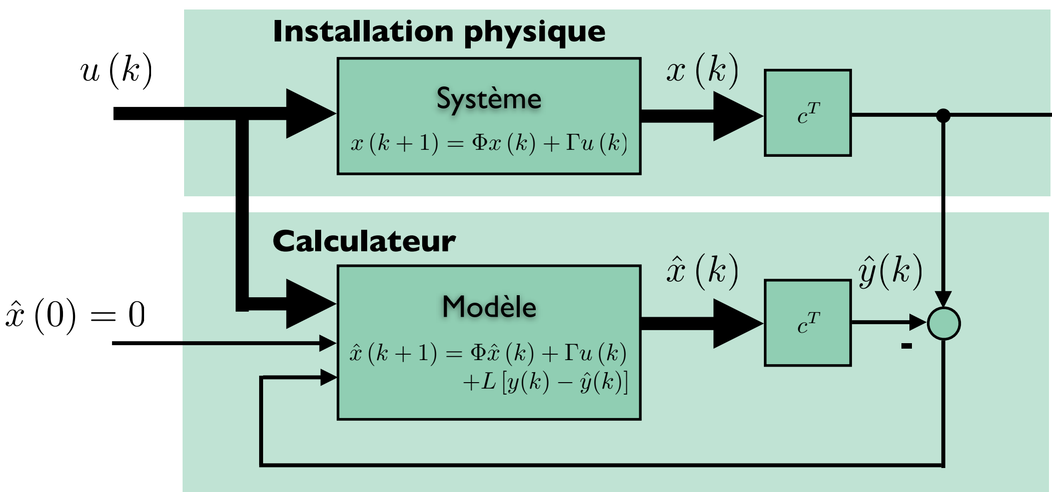
Estimation d'état

Système à observer $\quad \begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= c^T x(k) \end{aligned}$

Observateur $\quad \hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L[y(k) - \hat{y}(k)]$

Erreur d'estimation $\quad \delta(k+1) = \left[\Phi - Lc^T\right] \delta(k) = \Phi_e \delta(k)$

$$\alpha_e(\lambda) = \det(\lambda I - \Phi_e) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\dots(\lambda - \beta_n) = \det(\lambda I - \Phi + Lc^T) = 0$$



Prédiction +correction

Résumé estimation d'état SISO

Système à observer
$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\
y(k) &= c^T x(k)
\end{aligned}
$$

Observateur
$$
\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L\left[y(k) - \hat{y}(k)\right]
$$

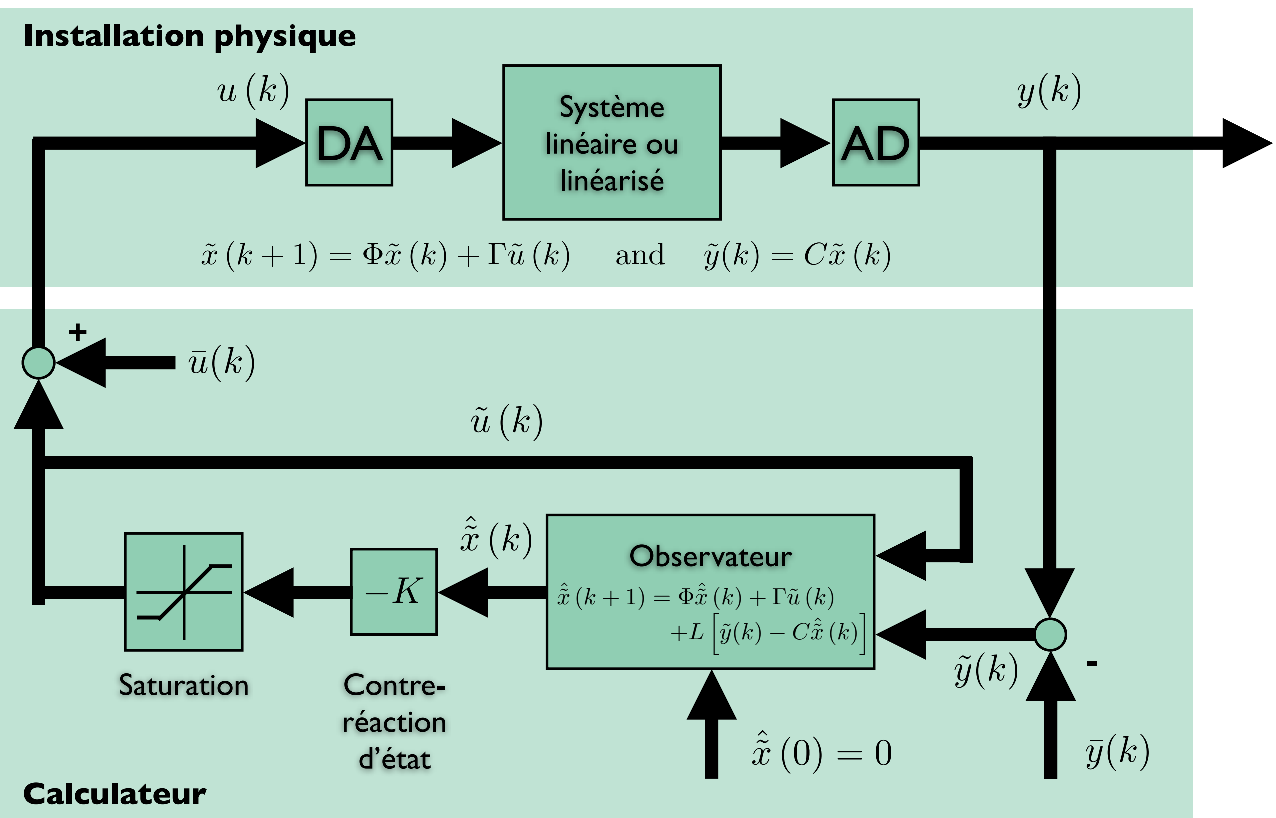
$$
\begin{aligned}
\delta(k) &= \hat{x}(k) - x(k) && \text{Erreur d'estimation} \\
\delta(k+1) &= \hat{x}(k+1) - x(k+1) \\
&= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L c^T \left[x(k) - \hat{x}(k)\right] - \Phi x(k) - \Gamma u(k) \\
&= \left[\Phi - L c^T\right] \delta(k) = \Phi_e \delta(k)
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_e(\lambda) = \det(\lambda I - \Phi_e) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\ldots(\lambda - \beta_n) = 0
$$

Formule d'Ackermann pour l'observateur

$$
L = \alpha_e(\Phi) Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_e(\Phi) \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \Phi \\ \vdots \\ c^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

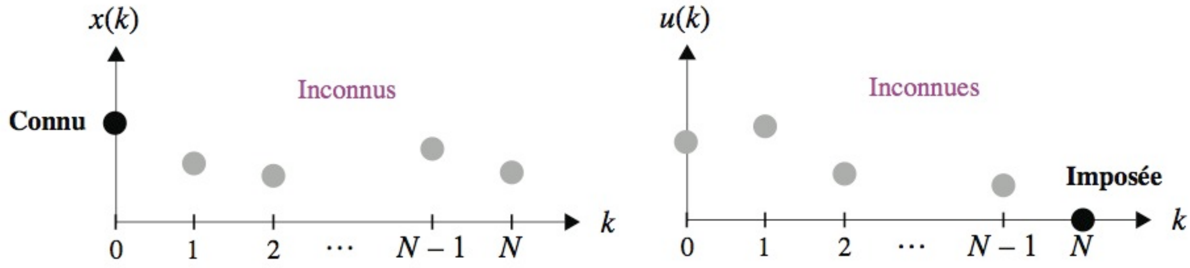
Structure complète de la commande d'état



Commande optimale: Principe

Séquence d'état $x\left(k\right), \; k=1,\ldots N, \; x\left(0\right)=x_0 \text{ connu}$

Séquence de commande $u\left(k\right), \; k=0,\ldots N-1, \; u\left(N\right)=0 \text{ imposé}$



Trouver la séquence de commande qui minimise la fonction coût

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left[x^T\left(k\right)Q_1x\left(k\right)+u^T\left(k\right)Q_2u\left(k\right)\right] \text{ avec } Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ diagonales} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left[q_{11}x_1^2\left(k\right)+\ldots+q_{1n}x_n^2\left(k\right)+q_{21}u_1^2\left(k\right)+\ldots+q_{2r}u_r^2\left(k\right)\right] \end{aligned}$$

tout en respectant la dynamique propre du système (contrainte)

$$-x\left(k+1\right)+\Phi x\left(k\right)+\Gamma u\left(k\right)=0, \quad \forall k$$

Commande optimale: Algorithme

$$S\left(k\right)=Q_1+\Phi^T\left\{S\left(k+1\right)-S\left(k+1\right)\Gamma\left[\Gamma^TS\left(k+1\right)\Gamma+Q_2\right]^{-1}\Gamma^TS\left(k+1\right)\right\}\Phi$$

Conditions finales $S\left(N\right)=Q_1, \quad K\left(N\right)=0$

Opérations à rebours depuis $k=N$

$$\begin{aligned} R\left(k\right) &= Q_2+\Gamma^TS\left(k\right)\Gamma \\ M\left(k\right) &= S\left(k\right)-S\left(k\right)\Gamma R^{-1}\left(k\right)\Gamma^TS\left(k\right) \\ K\left(k-1\right) &= R^{-1}\left(k\right)\Gamma^TS\left(k\right)\Phi \\ S\left(k-1\right) &= \Phi^TM\left(k\right)\Phi+Q_1 \\ k &\rightarrow k-1 \end{aligned}$$

Commande optimale: LQR

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left[x^T(k)\,Q_1 x(k) + u^T(k)\,Q_2 u(k)\right]$$

Linear Quadratic Regulator

Solution stationnaire de l'équation de Riccati

$$N \to \infty, \qquad S(k) = S(k+1) = S_\infty$$

$$S_\infty = \Phi^T\left[S_\infty - S_\infty\Gamma\left(\underbrace{Q_2 + \Gamma^T S_\infty \Gamma}_{R_\infty}\right)^{-1}\Gamma^T S_\infty\right]\Phi + Q_1$$

Deux solutions, prendre celle définie positive

$$K_\infty = R_\infty^{-1}\Gamma^T S_\infty \Phi$$

Matlab $[K_\infty, S_\infty, E_\infty] = dlqr(\Phi, \Gamma, Q_1, Q_2)$

Exemple d'examen

Dans certaines applications particulières d'entraînement, la vitesse ω est obtenue indirectement au moyen d'une mesure d'accélération α. Les équations qui décrivent un tel système sont:

$$\dot{\omega}(t) = a\omega(t) + bu(t)$$
$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t)$$
$$y(t) = \alpha(t)$$

Le signal $u(t)$ est la tension de commande du moteur à courant continu et les grandeurs scalaires a et b sont des constantes.

1) Représenter ce système sous forme de modèle d'état.
2) Déterminer le modèle d'état discret qui prend en compte les convertisseurs AD & DA.
3) Déterminer le gain d'un observateur d'état à réponse pile.
4) Monter que la présence d'un terme proportionnel à l'entrée dans l'équation de sortie $\{\, y(k) = c^T x(t) + Du(k) \,\}$ n'a pas d'impact sur la synthèse de l'observateur tel que défini au paragraphe 6.1.2 du polycopié.

Prochaine et dernière séance

Etude de cas

Labo ME A0 392