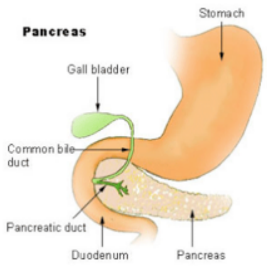
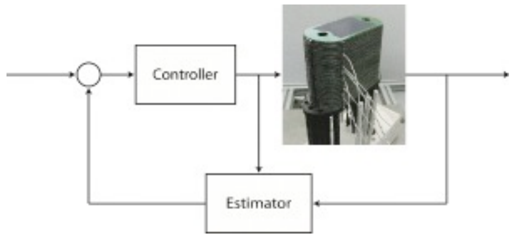
Projets de Master

http://lawww.epfl.ch/page1591.html

Optimal control of Insulin injection for the treatment of diabetes

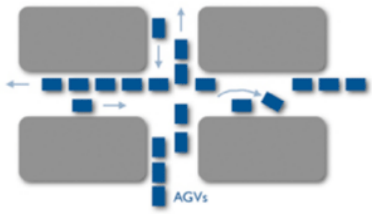




Control scenarios for a solid oxide fuel cell system

Motion planning control for the snake-like robot Amphibot III

Control of an autonomous unicycle

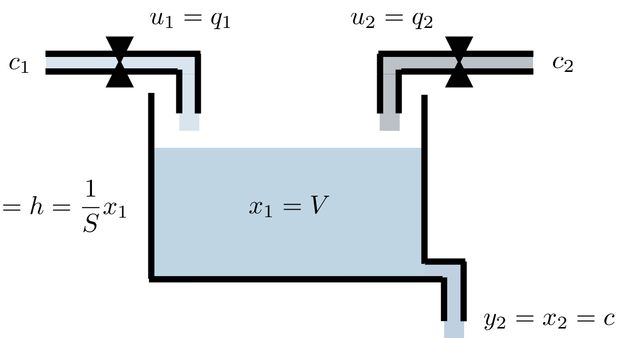


Optimal crossing of automated guided vehicles

We can also define ad hoc projects on demand !

Rappels: Motivation

Cuve de mélange



Modèle linéarisé et discrétisé

$$\tilde{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} r & r \\ s & v \end{bmatrix} \tilde{u}(k)$$

Commande d'état

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(k) \\ \tilde{u}_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix}$$

Placement des valeurs propres $\alpha_c(\lambda) = \det(\lambda I - \Phi + \Gamma K) = 0$

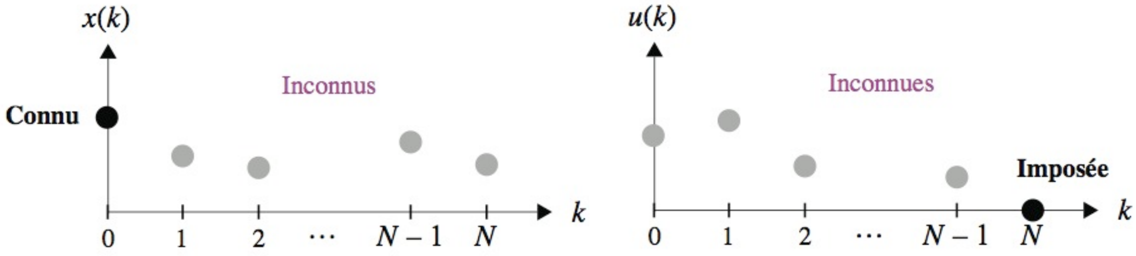
$$\lambda^2 + \underbrace{[rk_1 + sk_2 + rk_3 + vk_4 - \alpha - \beta]}_{0} \lambda$$

$$+ \underbrace{\{\alpha\beta - \alpha(sk_2 + vk_4) - \beta r(k_1 + k_3) + r(v - s)(k_1 k_4 - k_2 k_3)\}}_{0} = \lambda^2$$

7.1.4 Commande MIMO optimale: Principe

Séquence d'état $x\left(k\right),\ \ k=1,\ldots N,\ \ x\left(0\right)=x_0$ connu

Séquence de commande $u\left(k\right),\ \ k=0,\ldots N-1,\ \ u\left(N\right)=0$ imposé



Trouver la séquence de commande qui minimise la fonction coût

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left[x^T\left(k\right)Q_1x\left(k\right)+u^T\left(k\right)Q_2u\left(k\right)\right] \text{ avec } Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ diagonales} \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left[q_{11}x_1^2\left(k\right)+\ldots+q_{1n}x_n^2\left(k\right)+q_{21}u_1^2\left(k\right)+\ldots+q_{2r}u_r^2\left(k\right)\right] \end{aligned}$$

tout en respectant la dynamique propre du système (contrainte)

$$-x\left(k+1\right)+\Phi x\left(k\right)+\Gamma u\left(k\right)=0,\quad \forall k$$

7.1.5 Commande MIMO optimale: Solution

Multiplicateurs de Lagrange $\lambda\left(k\right),\ \ k=0,\ldots N-1$

$$\begin{aligned} J' &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left[x^T\left(k\right)Q_1x\left(k\right)+u^T\left(k\right)Q_2u\left(k\right)\right] \\ &\quad +\sum_{k=0}^{N}\left[\lambda^T\left(k+1\right)\left\{-x\left(k+1\right)+\Phi x\left(k\right)+\Gamma u\left(k\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

Solution

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial u_1(k)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial u_r(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial u\left(k\right)} = 0,\ \ \forall k \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial x_1(k)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial x_n(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial x\left(k\right)} = 0,\ \ \forall k$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial \lambda_1(k+1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial \lambda_n(k+1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial \lambda\left(k+1\right)} = 0,\ \ \forall k$$

7.1.7 Commande MIMO optimale: Riccati

Variable auxiliaire symétrique $\lambda(k) = S(k)\,x(k)$

$$S(k) = Q_1 + \Phi^T \left\{ S(k+1) - S(k+1)\,\Gamma \left[\Gamma^T S(k+1)\,\Gamma + Q_2\right]^{-1} \Gamma^T S(k+1) \right\} \Phi$$

Calculée à rebours depuis $S(N) = Q_1$

$$x(k+1) = \left[I + \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T S(k+1)\right]^{-1} \Phi x(k) \qquad x(0) = x_0$$

$$\lambda(\mathrm{k}) = Q_1 x(k) + \Phi^T \lambda(k+1) \qquad \lambda(N+1) = 0, \quad \lambda(N) = Q_1 x(N)$$

$$u(k) = -\underbrace{\left[Q_2 + \Gamma^T S(k+1)\Gamma\right]^{-1} \Gamma^T S(k+1)\Phi}_{K(k)}\, x(k) \qquad u(N) = 0$$

Par construction, la séquence de commande est proportionnelle à l'état !

$$S(k) = Q_1 + \Phi^T M(k+1)\Phi$$

$$M(k+1) = S(k+1) - S(k+1)\,\Gamma R^{-1}(k+1)\Gamma^T S(k+1)$$

$$R(k+1) = \Gamma^T S(k+1)\,\Gamma + Q_2$$

7.1.8 Commande optimale: Algorithme

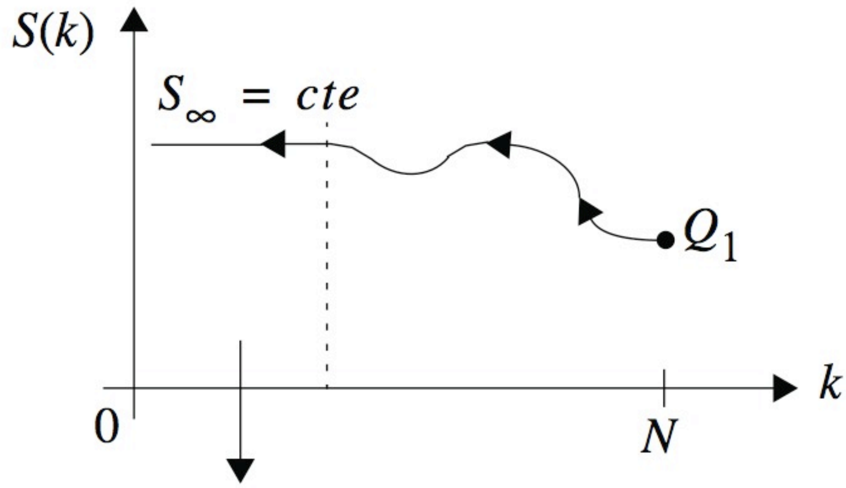
Conditions finales $S(N) = Q_1, \quad K(N) = 0$

Opérations à rebours depuis $k = N$

$$\begin{aligned}
R(k) &= Q_2 + \Gamma^T S(k)\,\Gamma \\
M(k) &= S(k) - S(k)\,\Gamma R^{-1}(k)\,\Gamma^T S(k) \\
K(k-1) &= R^{-1}(k)\,\Gamma^T S(k)\,\Phi \\
S(k-1) &= \Phi^T M(k)\,\Phi + Q_1 \\
k &\rightarrow k-1
\end{aligned}$$

7.2 Commande optimale: Allure

Cas SISO



$K_\infty = cte$: Gain optimal

$\det[\lambda I - \Phi + \Gamma K_\infty] = 0$

valeurs propres optimales!

7.2 Commande optimale: LQR

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left[x^T(k)\,Q_1 x(k) + u^T(k)\,Q_2 u(k)\right]$$

Linear Quadratic Regulator

Solution stationnaire de l'équation de Riccati

$$N \to \infty, \qquad S(k) = S(k+1) = S_\infty$$

$$S_\infty = \Phi^T\left[S_\infty - S_\infty\Gamma\left(\underbrace{Q_2 + \Gamma^T S_\infty \Gamma}_{R_\infty}\right)^{-1}\Gamma^T S_\infty\right]\Phi + Q_1$$

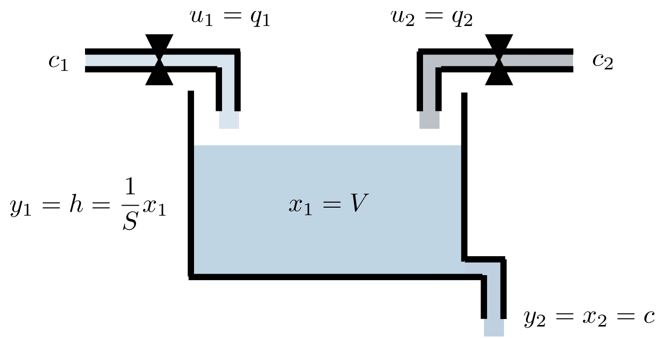
Deux solutions, prendre celle définie positive

$$K_\infty = R_\infty^{-1}\Gamma^T S_\infty \Phi$$

Matlab $[K_\infty, S_\infty, E_\infty] = dlqr(\Phi, \Gamma, Q_1, Q_2)$

7.3.2 Exemple cuve de mélange

Cuve de mélange



Modèle linéarisé et discrétisé

$$\tilde{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} r & r \\ s & v \end{bmatrix} \tilde{u}(k)$$

Commande d'état

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(k) \\ \tilde{u}_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix}$$

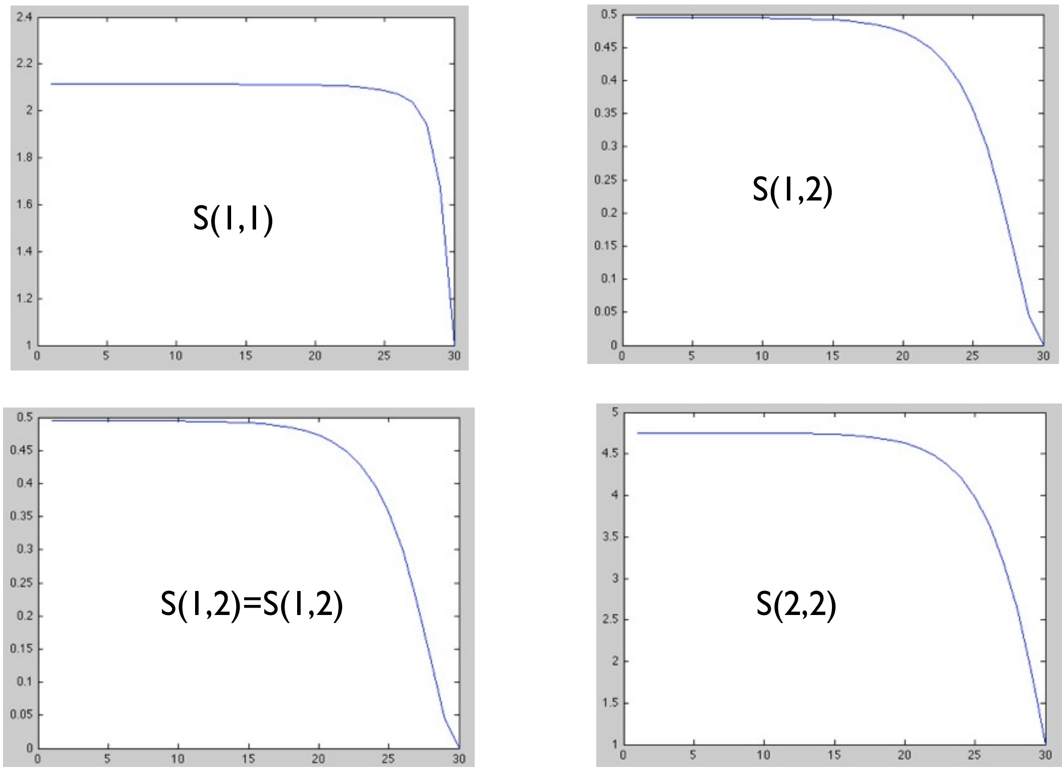
7.3.2 Cuve de mélange optimale

```
clear

% Valeurs nominales
% ------------------
  x1o=1;
  x2o=1.25;
  u1o=0.015;
  u2o=0.005;
  c1=1;
  c2=2;
  S=1;
  K=0.02;

% Modèle linéarisé analogique
% ---------------------------
  A=-[K*sqrt(x1o/S)/2 0 ; 0 u1o+u2o]./x1o;
  B=[1 1 ; (c1-x2o)/x1o (c2-x2o)/x1o];
  C=[1/S 0 ; 0 1];
  D=[0 0 ; 0 0];

% Modèle linéarisé discrétisé
% ---------------------------
  h=2;
  [F,G]=c2d(A,B,h);
  CI=[-0.1;0];
  a=A(1,1);
  b=A(2,2);
  p=B(2,1);
  q=B(2,2);
```

```
% Regulateur optimal
% ------------------
  Q1=[1 0;0 1];
  Q2=[10 0;0 100];

  N=30;
  S(1:2,1:2,N)=Q1;
  K(1:2,1:2,N)=[0 0;0 0];

  for i=N:-1:2
    Si=S(1:2,1:2,i);
    R(1:2,1:2,i)=Q2+G'*Si*G;
    Ri=R(1:2,1:2,i);
    M(1:2,1:2,i)=Si-Si*G*inv(Ri)*G'*Si;
    K(1:2,1:2,i-1)=inv(Ri)*G'*Si*F;
    S(1:2,1:2,i-1)=F'*M(1:2,1:2,i)*F+Q1;
  end

  for i=1:N
      s11(i)=S(1,1,i);
      s12(i)=S(1,2,i);
      s21(i)=S(2,1,i);
      s22(i)=S(2,2,i);
  end
```

7.3.2 Cuve de mélange optimale

N=30

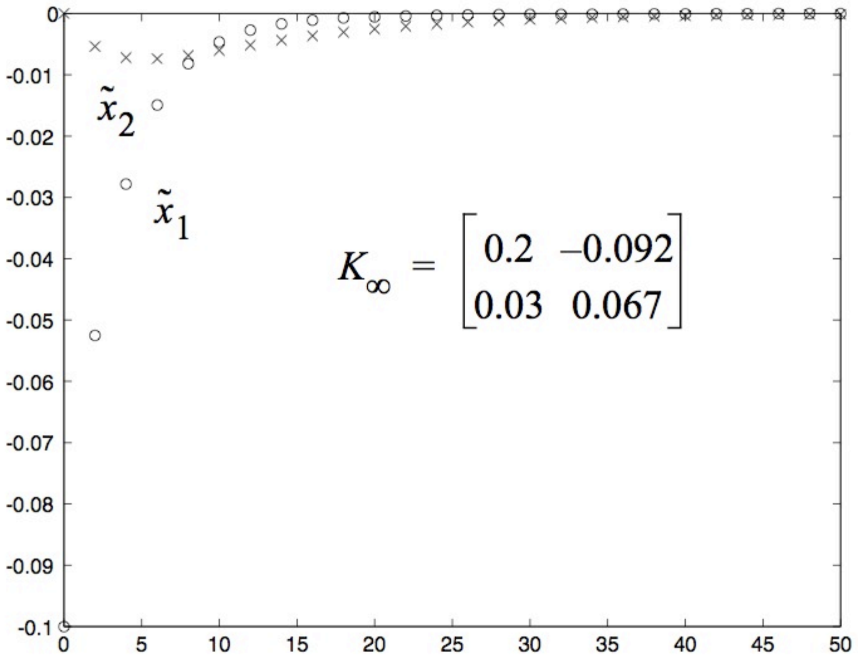


7.3.2 Cuve de mélange optimale

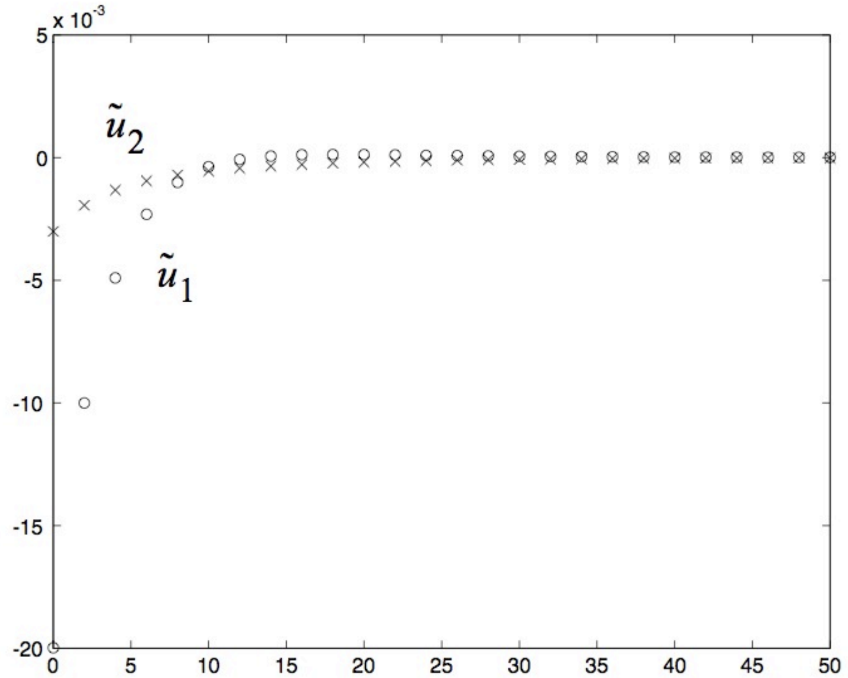
```
% Valeurs nominales
% -----------------
  x1o=1;
  x2o=1.25;
  u1o=0.015;
  u2o=0.005;
  c1=1;
  c2=2;
  S=1;
  K=0.02;

% Modèle linéarisé analogique
% ---------------------------
  A=-[K*sqrt(x1o/S)/2 0 ; 0 u1o+u2o]./x1o;
  B=[1 1 ; (c1-x2o)/x1o (c2-x2o)/x1o];
  C=[1/S 0 ; 0 1];
  D=[0 0 ; 0 0];
```

```
% Modèle linéarisé discrétisé
% ---------------------------
  h=2;
  [F,G]=c2d(A,B,h);
  CI=[-0.1;0];
  a=A(1,1);
  b=A(2,2);
  p=B(2,1);
  q=B(2,2);
  Fex=[exp(a*h) 0;0 exp(b*h)]
  Gex=[(exp(a*h)-1)/a (exp(a*h)-1)/a;
            p*(exp(b*h)-1)/b q*(exp(b*h)-1)/b]
% Regulateur optimal
% ------------------
  Q1=[1 0;0 1];
  Q2=[10 0;0 100];
  [Ks,Ss,E]=dlqr(F,G,Q1,Q2);
  [t,x,y]=sim('SimCuve',100);
  u=x*Ks';
  plot(t,x)
  pause
  plot(t,u)
```

7.3.2 Cuve de mélange optimale



7.3.2 Cuve de mélange optimale



Exemple de solution LQR analytique

Soit le système décrit par:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(k) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

La commande optimale stationnaire pour $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $Q_2 = c$ est

$$R_\infty = Q_2 + \Gamma^T S_\infty \Gamma = c + \begin{bmatrix} b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s \\ s & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = c + b^2 s_1$$

$$M_\infty = S_\infty - S_\infty \Gamma R_\infty^{-1} \Gamma^T S_\infty$$

$$M_\infty = \begin{bmatrix} s_1 & s \\ s & s_2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} s_1 & s \\ s & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s \\ s & s_2 \end{bmatrix}}{c + b^2 s_1}$$

$$M_\infty = \frac{\begin{bmatrix} s_1 c + b^2 s_1^2 & sc + b^2 s s_1 \\ sc + b^2 s s_1 & s_2 c + b^2 s_1 s_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^2 s_1^2 & b^2 s s_1 \\ b^2 s s_1 & b^2 s^2 \end{bmatrix}}{c + b^2 s_1}$$

Exemple de solution LQR analytique

La commande optimale stationnaire pour $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $Q_2 = c$ est

$$M_\infty = \frac{1}{c + b^2 s_1} \begin{bmatrix} s_1 c & sc \\ sc & s_2 c + b^2 s_1 s_2 - b^2 s^2 \end{bmatrix} \qquad S_\infty = \Phi^T M_\infty \Phi + Q_1$$

$$S_\infty - Q_1 = \Phi^T M_\infty \Phi$$

$$\begin{bmatrix} s_1 - 1 & s \\ s & s_2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{c + b^2 s_1} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 c & sc \\ sc & s_2 c + b^2 s_1 s_2 - b^2 s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (s_1 - 1)(c + b^2 s_1) & s(c + b^2 s_1) \\ s(c + b^2 s_1) & (s_2 - 1)(c + b^2 s_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a s_1 c + sc & asc + s_2 c + b^2 s_1 s_2 - b^2 s^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 s_1 c + 2asc + s_2 c + b^2 s_1 s_2 - b^2 s^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple de solution LQR analytique

La commande optimale stationnaire pour $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $Q_2 = c$ est

$$S_\infty - Q_1 = \Phi^T M_\infty \Phi$$

$$\begin{bmatrix} (s_1-1)(c+b^2 s_1) & s(c+b^2 s_1) \\ s(c+b^2 s_1) & (s_2-1)(c+b^2 s_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 s_1 c + 2asc + s_2 c + b^2 s_1 s_2 - b^2 s^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

~~$c + b^2 s_1 = 0$~~ ou $s = 0$
$s_1 = -\frac{c}{b^2}$ pas définie positive car c>0

$s_2 c + b^2 s_1 s_2 - c - b^2 s_1 = 0$
$(s_2 - 1)(c + b^2 s_1) = 0$
$s_2 = 1$

$(s_1 - 1)(c + b^2 s_1) = a^2 s_1 c + 2asc + s_2 c + b^2 s_1 s_2 - b^2 s^2$
$b^2 s_1^2 - c + s_1 c - b^2 s_1 = a^2 s_1 c + c + b^2 s_1$
$b^2 s_1^2 + (c - 2b^2 - a^2 c) s_1 - 2c = 0$
$s_1 = \frac{-(c-2b^2-a^2c) \pm \sqrt{(c-2b^2-a^2c)^2 + 8b^2 c}}{2b^2}$

Dualité Commande & Estimation MIMO

$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$
$y(k) = Cx(k)$
$u(k) = -Kx(k)$
$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)\, x(k)$
$\Phi_{BF} = \Phi - \Gamma K$

$K = R^{-1} \Gamma^T S \Phi$
$R = \Gamma^T S \Gamma + Q_2$
$S = \Phi^T \left[S - S\Gamma R^{-1} \Gamma^T S \right] \Phi + Q_1$

Dualité Commande & Estimation MIMO

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$
$$u(k) = -Kx(k)$$
$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)\, x(k)$$
$$\Phi_{BF} = \Phi - \Gamma K$$

$$\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L\left[y(k) - \hat{y}(k)\right]$$
$$\delta(k) = \hat{x}(k) - x(k)$$
$$\delta(k+1) = (\Phi - LC)\,\delta(k)$$
$$\Phi_e = \Phi - LC$$
$$\Phi_e^T = \Phi^T - C^T L^T$$

$$\Phi \leftrightarrow \Phi^T$$
$$\Gamma \leftrightarrow C^T$$
$$K \leftrightarrow L^T$$

$$K = R^{-1}\Gamma^T S \Phi$$
$$R = \Gamma^T S \Gamma + Q_2 \quad \text{(r x r)}$$
$$S = \Phi^T \left[S - S\Gamma R^{-1}\Gamma^T S\right] \Phi + Q_1$$
(n x n)

$$L^T = R^{-1} C S \Phi^T$$
$$L = \Phi S C^T R^{-1}$$
$$R = CSC^T + Q_2 \quad \text{(p x p)}$$
$$S = \Phi \left[S - SC^T R^{-1} C S\right] \Phi^T + Q_1$$
(n x n)

Dualité Commande & Estimation MIMO

$$\Phi \leftrightarrow \Phi^T$$
$$\Gamma \leftrightarrow C^T$$
$$K \leftrightarrow L^T$$

$$K = R^{-1}\Gamma^T S \Phi$$
$$R = \Gamma^T S \Gamma + Q_2$$
$$S = \Phi^T \left[S - S\Gamma R^{-1}\Gamma^T S\right] \Phi + Q_1$$

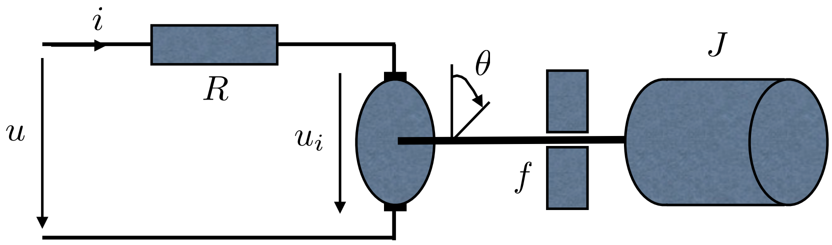
$$L^T = R^{-1} C S \Phi^T$$
$$L = \Phi S C^T R^{-1}$$
$$R = CSC^T + Q_2$$
$$S = \Phi \left[S - SC^T R^{-1} C S\right] \Phi^T + Q_1$$

$$G^T = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}^T$$

$$G^T = \begin{bmatrix} \Gamma^T \\ \Gamma^T \Phi^T \\ \vdots \\ \Gamma^T \left(\Phi^T\right)^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} = Q$$

Gouvernabilité ↔ Observabilité

Entraînement avec observateur optimal



Modèle physique

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{J}\left(\frac{k^2}{R} + f\right)\omega(t) + \frac{k}{JR}u(t)$$
$$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

Choix des variables d'état

$$x_1(t) = \theta(t)$$
$$x_2(t) = \omega(t)$$
$$y(t) = \theta(t)$$

Modèle d'état: équation d'état

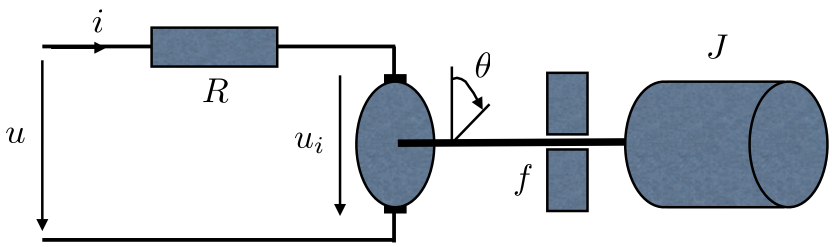
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{J}\left(\frac{k^2}{R} + f\right)x_2(t) + \frac{k}{JR}u(t)$$

Modèle d'état: équation de sortie

$$y_1(t) = x_1(t)$$
$$y_2(t) = x_2(t)$$

Entraînement avec observateur optimal



Modèle d'état: équation d'état

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \underbrace{-\frac{1}{J}\left(\frac{k^2}{R} + f\right)}_{a}x_2(t) + \underbrace{\frac{k}{JR}}_{b}u(t)$$

Modèle d'état: équation de sortie

$$y_1(t) = x_1(t)$$
$$y_2(t) = x_2(t)$$

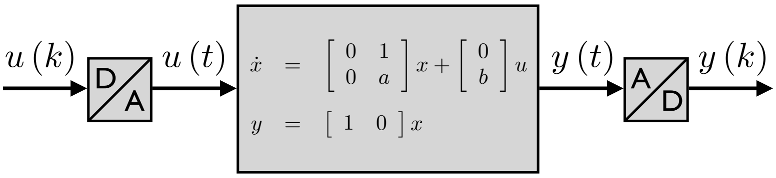
Modèle d'état: équation d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}u(t)$$

Modèle d'état: équation de sortie

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Entraînement avec observateur optimal



$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases}$$

$$\Phi = e^{Ah} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}\left(e^{ah}-1\right) \\ 0 & e^{ah} \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \frac{b}{a}\begin{bmatrix} \frac{1}{a}\left(e^{ah}-1\right) - h \\ \left(e^{ah}-1\right) \end{bmatrix}$$

exemple: 4.1.12

$\Phi \leftrightarrow \Phi^T$
$\Gamma \leftrightarrow C^T$
$K \leftrightarrow L^T$

Commande $[K_\infty, S_\infty, E_\infty] = dlqr\left(\Phi, \Gamma, Q_1, Q_2\right)$

Observation $[L_\infty^T, S_\infty, E_\infty] = dlqr\left(\Phi^T, C^T, Q_1, Q_2\right)$

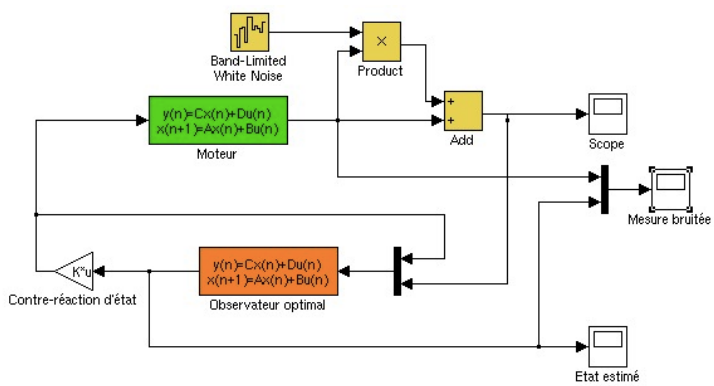
Bloc observateur pour Simulink

$$\hat{x}(k+1) = \Phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L\left[y(k) - C\hat{x}(k)\right]$$
$$\hat{x}(k+1) = (\Phi - LC)\hat{x}(k) + \begin{bmatrix} \Gamma & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

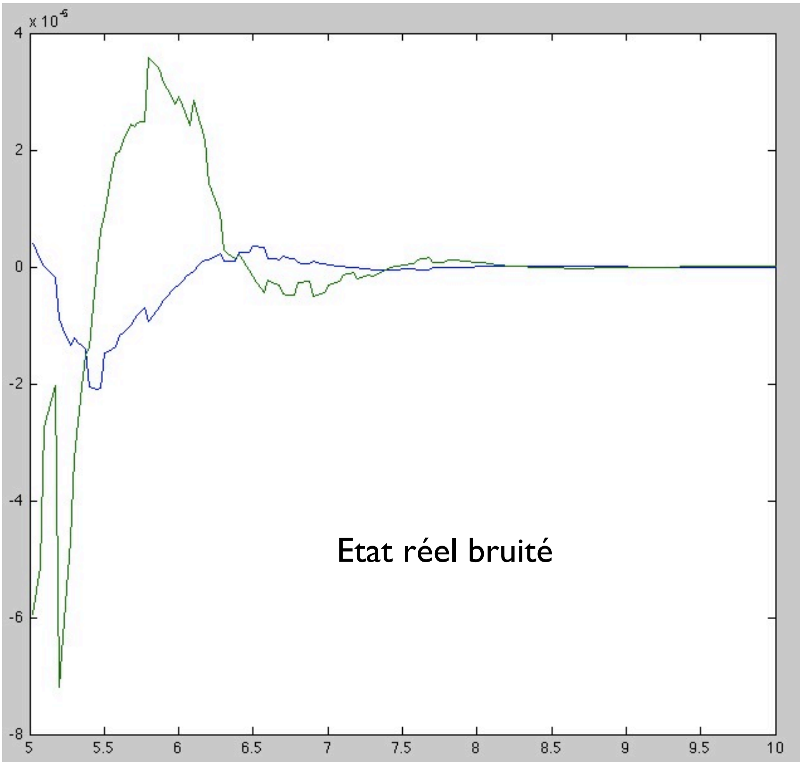
Entraînement avec observateur optimal

```
clear

% Modèle analogique
% -----------------

  a=-5;
  b=1;
  A=[0 1;0 a];
  B=[0;b];
  C=[1 0;0 1];
  D=[0;0];

% Modèle discret
% --------------

  h=25e-3;
  e=exp(a*h);
  F=[1 (e-1)/a;0 e];
  G=[-b*(h-e/a+1/a)/a;b*(e-1)
a];

% Commande
% --------

s = -1.8+3.12*j;
z1 = exp(h*s);
z2 = exp(h*s');

K = acker(F,G,[z1,z2]);
```

```
% Observateur optimal
% -------------------

Q1=[1 0;0 1]
Q2=100*[1 0;0 1]

[M,S,R]=dlqr(F',C',Q1,Q2);

L = M';
```



Entraînement avec observateur optimal



Entraînement avec observateur optimal