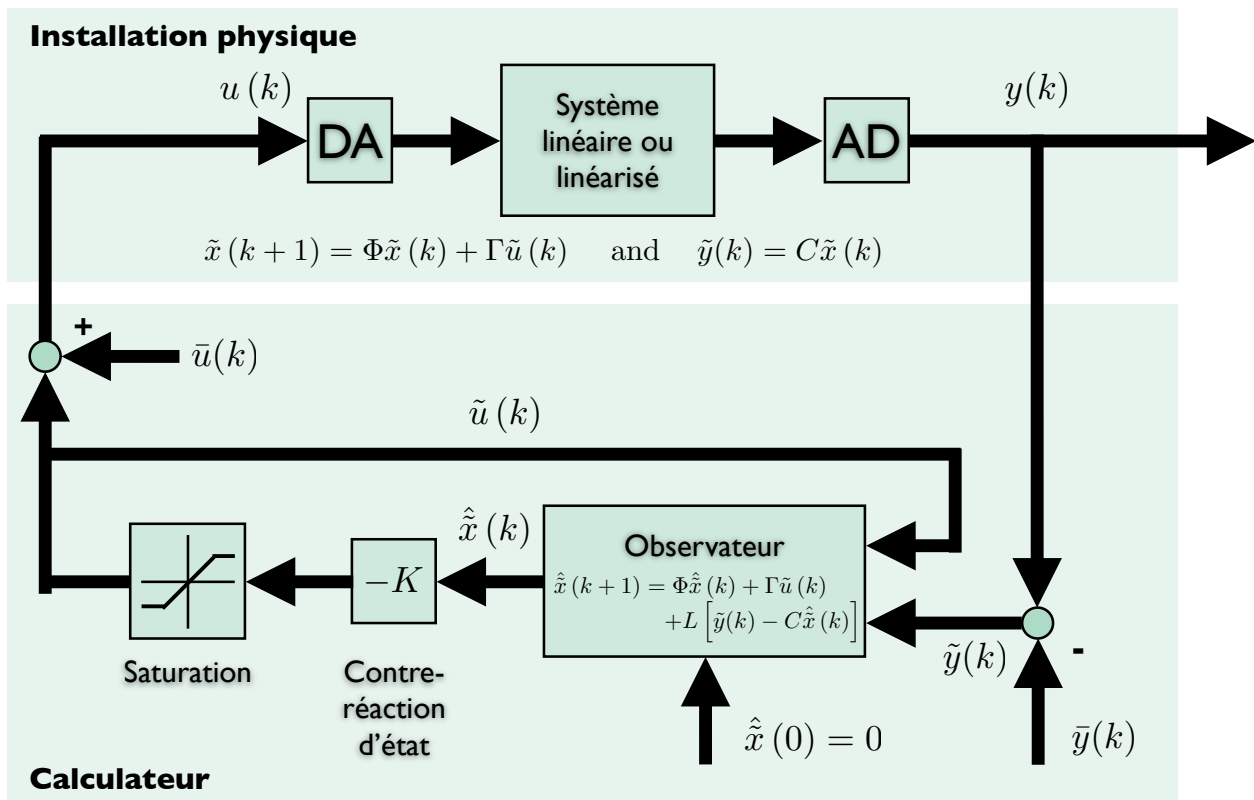
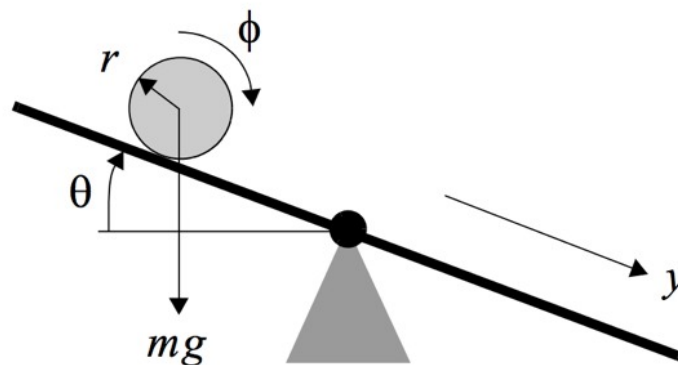


Structure complète de la commande d'état



Exemple balançoire



Modèle d'état

$$J\ddot{\varphi}(t) = mgr \sin(\theta)$$

$$u(t) = \theta(t)$$

$$x_1(t) = \varphi(t)$$

$$x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{mgr}{J} \sin u(t) = b \sin u(t)$$

$$y(t) = rx_1(t)$$

Exemple balançoire

Linéarisation par contre-réaction

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{mgr}{J} \sin u(t) = b \sin u(t)$$

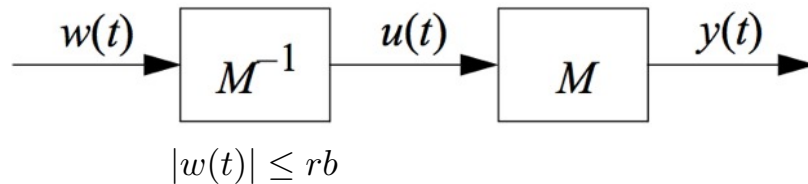
$$y(t) = rx_1(t)$$

$$y(t) = rx_1(t)$$

$$\dot{y}(t) = r\dot{x}_1(t) = rx_2(t)$$

$$\ddot{y}(t) = r\dot{x}_2(t) = rb \sin u(t) \equiv w(t)$$

$$u(t) = \arcsin \frac{w(t)}{rb}$$



Nouveau modèle équivalent

$$\ddot{y}(t) = w(t)$$

$$x_1(t) = y(t) = r\varphi(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) = r\dot{\varphi}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = w(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

3

Exemple balançoire

Nouveau modèle équivalent

$$\ddot{y}(t) = w(t)$$

$$x_1(t) = y(t) = r\varphi(t)$$

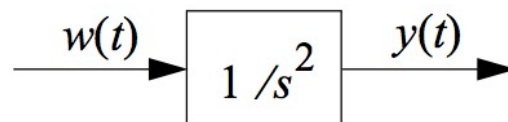
$$x_2(t) = \dot{y}(t) = r\dot{\varphi}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = w(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

C'est le double intégrateur bien connu



Modèle discret du double intégrateur (4.2.4)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

4

Exemple balançoire

Observateur à réponse pile

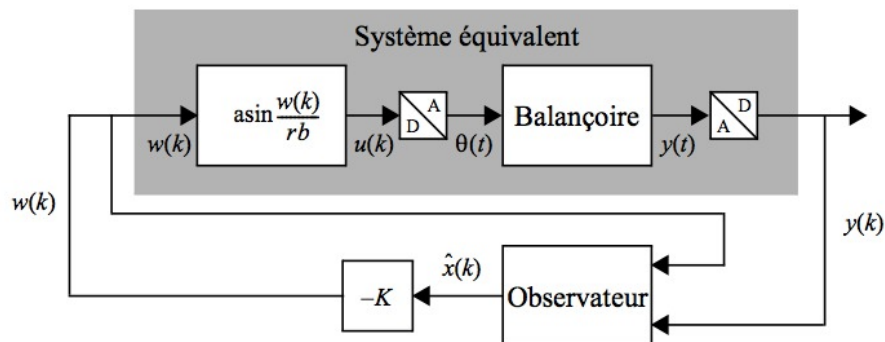
$$\alpha_e(\lambda) = \lambda^2$$

$$L = \alpha_e(\Phi) \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \Phi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/h \end{bmatrix}$$

Commande par placement des valeurs propres

$$\alpha_c(\lambda) = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.7$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & \Phi g \end{bmatrix}^{-1} \alpha_c(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{0.1}{h^2} & \frac{0.35}{h} \end{bmatrix}$$



5

Gouvernabilité et observabilité

Un système est **gouvernable** ou **commandable** si et seulement si le rang de sa **matrice de gouvernabilité** ou **matrice de commandabilité** vaut n

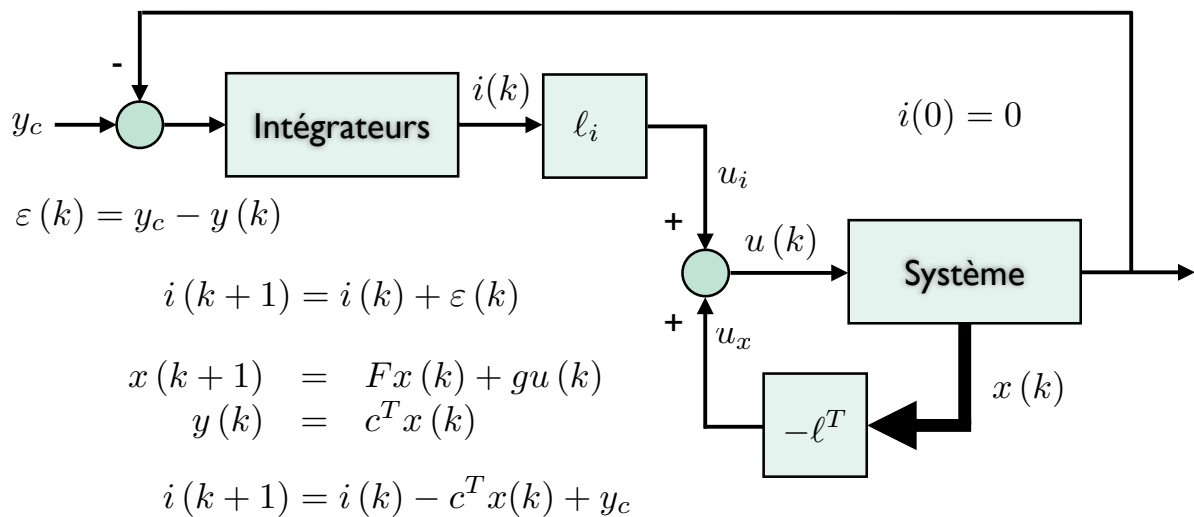
$$G = \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nr}$$

Le système est **observable** si et seulement si le rang de la matrice d'observabilité suivante vaut n

$$Q = \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

6

Régulateur avec intégrateur (livre I4.3.3)

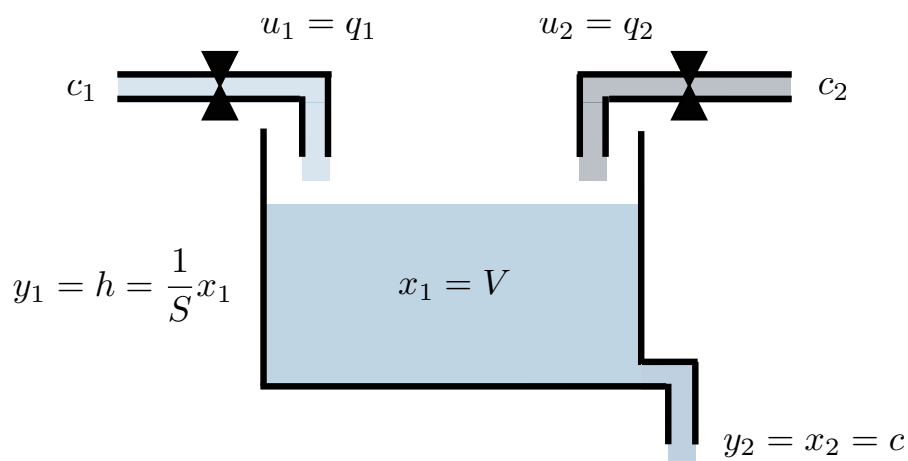


$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ i(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \\ -c^T & 1 \end{bmatrix}}_{F^*} \begin{bmatrix} x(k) \\ i(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}}_{g^*} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_c$$

$$u(k) = - \underbrace{\begin{bmatrix} \ell^T & \ell_i \end{bmatrix}}_{\ell^{T*}} \begin{bmatrix} x(k) \\ i(k) \end{bmatrix} = u_x + u_i$$

7

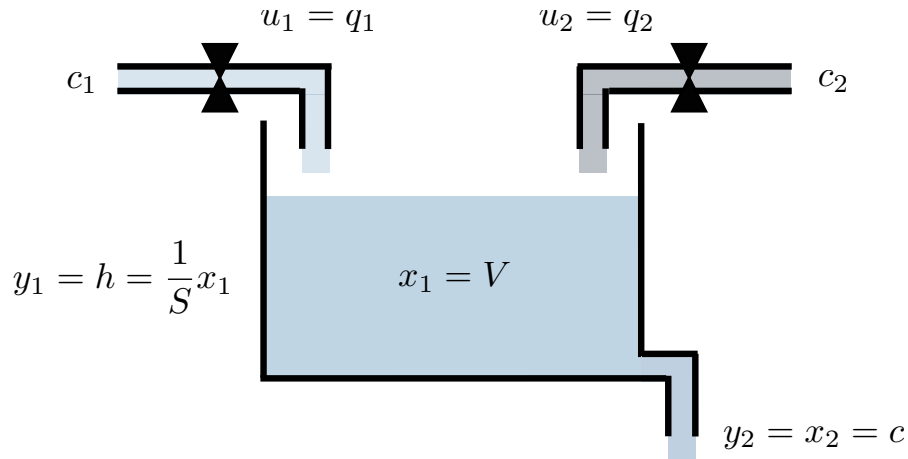
3.3.5 & 3.3.6 Cuve de mélange: Modèle d'état



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) - K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}} \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{x_1(t)} \{ [c_1 - x_2(t)] u_1(t) + [c_2 - x_2(t)] u_2(t) \} \\ y_1(t) = \frac{1}{S}x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

8

Cuve de mélange: Point de fonctionnement

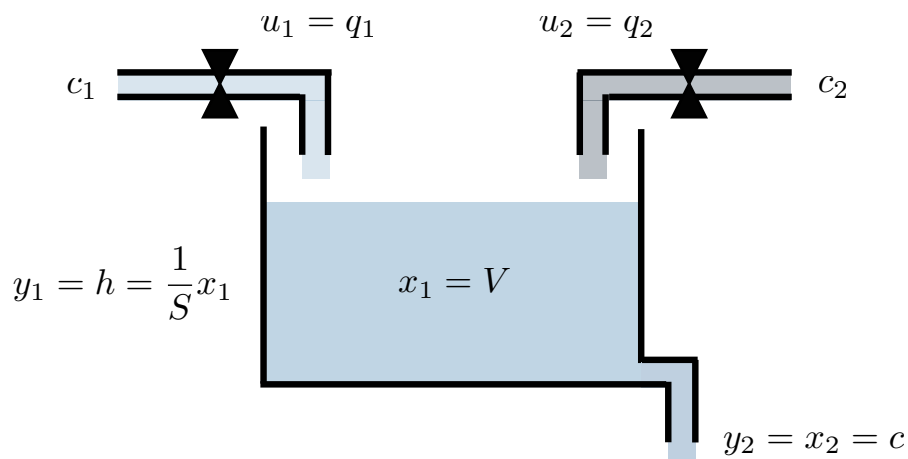


$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) - K\sqrt{\frac{x_1(t)}{S}} \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{x_1(t)} \{ [c_1 - x_2(t)] u_1(t) + [c_2 - x_2(t)] u_2(t) \} \end{array} \right| \begin{array}{l} y_1(t) = \frac{1}{S}x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - K\sqrt{\frac{\bar{x}_1}{S}} \\ 0 = \frac{1}{\bar{x}_1} \{ [c_1 - \bar{x}_2] \bar{u}_1 + [c_2 - \bar{x}_2] \bar{u}_2 \} \end{array} \right| \begin{array}{l} \bar{y}_1 = \frac{1}{S}\bar{x}_1 \\ \bar{y}_2 = \bar{x}_2 \end{array}$$

9

Cuve de mélange: Modèle d'état linéarisé

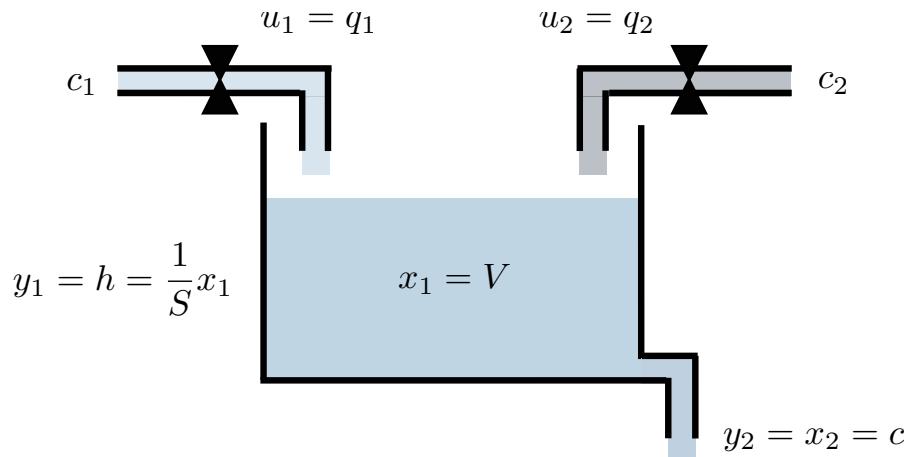


$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{1}{\bar{x}_1} \begin{bmatrix} \frac{K}{2}\sqrt{\frac{\bar{x}_1}{S}} & 0 \\ 0 & \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{(c_1 - \bar{x}_2)}{\bar{x}_1} & \frac{(c_2 - \bar{x}_2)}{\bar{x}_1} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

10

4.1.14 Cuve de mélange: Modèle d'état discrétisé



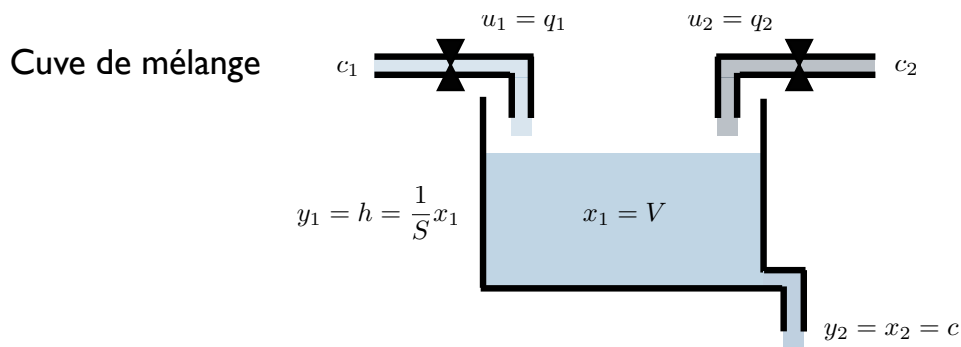
$$\Phi = e^{Ah} = \begin{bmatrix} e^{ah} & 0 \\ 0 & e^{bh} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^h e^{A\eta} d\eta B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(e^{ah} - 1) & \frac{1}{a}(e^{ah} - 1) \\ \frac{p}{b}(e^{bh} - 1) & \frac{q}{b}(e^{bh} - 1) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r & r \\ s & v \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11

7.1.2 Commande optimale: Motivation

12



Modèle linéarisé et discrétisé

$$\tilde{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} r & r \\ s & v \end{bmatrix} \tilde{u}(k)$$

Commande d'état

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(k) \\ \tilde{u}_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix}$$

7.1.2 Commande optimale: Motivation

Placement des valeurs propres $\alpha_c(\lambda) = \det(\lambda I - \Phi + \Gamma K) = 0$

Dynamique imposée en BF, par exemple: $\alpha_c(\lambda) = \lambda^2$

Identification terme-à-terme (Ackermann ne fonctionne pas si $r > 1$)

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & r \\ s & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2$$

$$\lambda^2 + \underbrace{[rk_1 + sk_2 + rk_3 + vk_4 - \alpha - \beta]}_0 \lambda + \underbrace{\{\alpha\beta - \alpha(sk_2 + vk_4) - \beta r(k_1 + k_3) + r(v - s)(k_1k_4 - k_2k_3)\}}_0 = \lambda^2$$

2 équations et 4 inconnues $\rightarrow$ degrés de liberté à utiliser !

7.1.2 Commande optimale: Motivation

1ère stratégie: seule la 1ère vanne est manipulée $k_3 = k_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(k) \\ \tilde{u}_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1\tilde{x}_1(k) - k_2\tilde{x}_2(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{\alpha^2}{r(\alpha - \beta)} = 25 \quad \text{et} \quad k_2 = -\frac{\beta^2}{s(\alpha - \beta)} = 97$$

2ème stratégie: seule la 2ème vanne est manipulée $k_1 = k_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(k) \\ \tilde{u}_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_3\tilde{x}_1(k) - k_4\tilde{x}_2(k) \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{\alpha^2}{r(\alpha - \beta)} = 25 \quad \text{et} \quad k_4 = -\frac{\beta^2}{v(\alpha - \beta)} = -32.35$$

3ème stratégie: u_1 fonction de x_1 et u_2 fonction de x_2 , soit $k_2 = k_3 = 0$

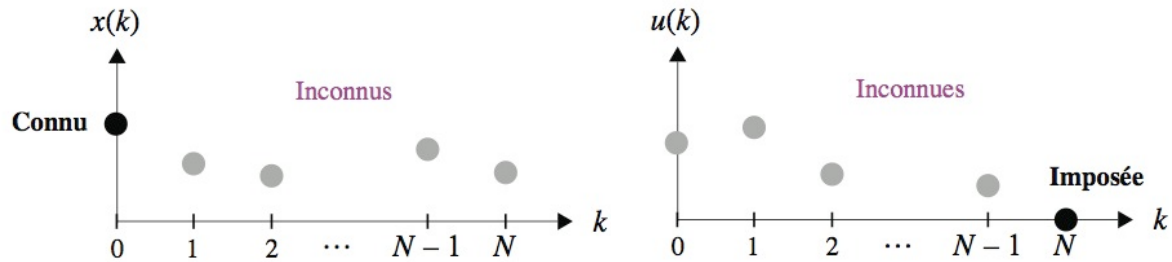
$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1(k) \\ \tilde{u}_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1\tilde{x}_1(k) \\ -k_4\tilde{x}_2(k) \end{bmatrix}$$

$$k_4^2(vs - v^2) + k_4(2\beta v - \alpha s - \beta s) - \beta^2 = 0 \rightarrow k_4 = \begin{cases} 0.99 \\ 0.33 \end{cases} \quad \text{et} \quad k_1 = \begin{cases} 0.25 \\ 0.74 \end{cases}$$

7.1.3-4 Commande optimale: Principe

Séquence d'état $x(k)$, $k = 1, \dots, N$, $x(0) = x_0$ connu

Séquence de commande $u(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, $u(N) = 0$ imposé



Trouver la séquence de commande qui minimise la fonction coût

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)] \text{ avec } Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ diagonales}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [q_{11}x_1^2(k) + \dots + q_{1n}x_n^2(k) + q_{21}u_1^2(k) + \dots + q_{2r}u_r^2(k)]$$

tout en respectant la dynamique propre du système (contrainte)

$$-x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k) = 0, \quad \forall k$$

7.1.5 ... Commande optimale: Solution

Multiplicateurs de Lagrange $\lambda(k)$, $k = 0, \dots, N-1$

$$J' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)]$$

$$+ \sum_{k=0}^N [\lambda^T(k+1) \{-x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k)\}]$$

Solution

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial u_1(k)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial u_r(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial u(k)} = 0, \quad \forall k \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial x_1(k)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial x_n(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial x(k)} = 0, \quad \forall k$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial \lambda_1(k+1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial \lambda_n(k+1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial \lambda(k+1)} = 0, \quad \forall k$$

7.4 Commande optimale: Rappels math.

A , matrice réelle, symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$), de dimensions $n \times n$

x et y , vecteurs réels, de dimension n

Forme quadratique réelle

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{scalaire!}$$

A est définie positive si

$$x^T A x > 0 \text{ pour } x \neq 0$$

$$x^T A x = 0 \text{ pour } x = 0$$

Les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles

Si A est définie positive, ses valeurs propres sont réelles positives et A est régulière (invertible)

7.4 Commande optimale: Rappels math.

A , matrice réelle, symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$), de dimensions $n \times n$

x et y , vecteurs réels, de dimension n

Dérivée d'une forme quadratique réelle

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = 2Ax = (2x^T A)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \underbrace{x^T A x}_{\begin{bmatrix} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

Cette forme est un vecteur colonne

Rappel $(AB)^T = B^T A^T$

7.4 Commande optimale: Rappels math.

A , matrice réelle, symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$), de dimensions $n \times n$

x et y , vecteurs réels, de dimension n

Forme bilinéaire

$$x^T A y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{scalaire!}$$

Dérivée d'une forme bilinéaire

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A y = A y = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{vecteur colonne!}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y^T A x = A^T y = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

comme A est symétrique $A^T = A$

7.1.5 ... Commande optimale: Solution

$$J' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)] \\ + \sum_{k=0}^N [\lambda^T(k+1) \{-x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k)\}]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial u_1(k)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial u_r(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial u(k)} = Q_2 u(k) + \Gamma^T \lambda(k+1) = 0, \quad \forall k$$

$$\text{pour } k = N, \quad \underbrace{Q_2 u(N)}_0 + \Gamma^T \lambda(N+1) = 0 \rightarrow \lambda(N+1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial \lambda_1(k+1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial \lambda_n(k+1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial \lambda(k+1)} = -x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k) = 0, \quad \forall k$$

on retrouve la contrainte!

7.1.5 ... Commande optimale: Solution

$$J' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)] \\ + \sum_{k=0}^N [\lambda^T(k+1) \{-x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k)\}]$$

termes contenant $x(k)$

$$J' = \dots + \lambda^T(k) \{-x(k) + \Phi x(k-1) + \Gamma u(k-1)\} \\ + \frac{1}{2} x^T(k) Q_1 x(k) + \frac{1}{2} u^T(k) Q_2 u(k) \\ + \lambda^T(k+1) \{-x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k)\} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J'}{\partial x_1(k)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J'}{\partial x_n(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial J'}{\partial x(k)} = -\lambda(k) + Q_1 x(k) + \Phi^T \lambda(k+1) = 0, \quad \forall k$$

pour $k = N$, $-\lambda(N) + Q_1 x(N) + \underbrace{\Phi^T \lambda(N+1)}_0 = 0 \rightarrow \lambda(N) = Q_1 x(N)$

7.1.5 ... Commande optimale: Résumé

$$J' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k)] \\ + \sum_{k=0}^N [\lambda^T(k+1) \{-x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k)\}]$$

Condition initiale $x(0) = x_0$

Conditions finales $u(N) = 0, \quad \lambda(N+1) = 0, \quad \lambda(N) = Q_1 x(N)$

Système d'équations
à résoudre

$$\begin{aligned} Q_2 u(k) + \Gamma^T \lambda(k+1) &= 0 \\ -x(k+1) + \Phi x(k) + \Gamma u(k) &= 0 \\ -\lambda(k) + Q_1 x(k) + \Phi^T \lambda(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$u(k) = -Q_2^{-1} \Gamma^T \lambda(k+1)$$

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) = \Phi x(k) - \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T \lambda(k+1)$$

$$\lambda(k) = Q_1 x(k) + \Phi^T \lambda(k+1)$$

7.1.5 ... Commande optimale: Riccati

Variable auxiliaire symétrique $\lambda(k) = S(k)x(k)$

$$\lambda(N) = S(N)x(N) \rightarrow Q_1x(N) = S(N)x(N) \rightarrow S(N) = Q_1$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) - \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T \lambda(k+1) \\ x(k+1) &= \Phi x(k) - \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T S(k+1)x(k+1) \\ [I + \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T S(k+1)] x(k+1) &= \Phi x(k) \\ x(k+1) &= [I + \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T S(k+1)]^{-1} \Phi x(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= Q_1x(k) + \Phi^T \lambda(k+1) \\ S(k)x(k) &= Q_1x(k) + \Phi^T S(k+1)x(k+1) \\ S(k)x(k) &= Q_1x(k) + \Phi^T S(k+1) [I + \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T S(k+1)]^{-1} \Phi x(k) \\ S(k) &= Q_1 + \Phi^T S(k+1) [I + \Gamma Q_2^{-1} \Gamma^T S(k+1)]^{-1} \Phi \end{aligned}$$

Lemme d'inversion $(A^{-1} + BCD)^{-1} = A - AB(DAB + C^{-1})^{-1}DA$

$$S(k) = Q_1 + \Phi^T S(k+1) \left\{ I - \Gamma [\Gamma^T S(k+1) \Gamma + Q_2]^{-1} \Gamma^T S(k+1) \right\} \Phi$$

7.1.5 ... Commande optimale: Riccati

$$S(k) = Q_1 + \Phi^T \left\{ S(k+1) - S(k+1) \Gamma [\Gamma^T S(k+1) \Gamma + Q_2]^{-1} \Gamma^T S(k+1) \right\} \Phi$$

Calculée à rebours depuis $S(N) = Q_1$

La commande est donnée par

$$\begin{aligned} Q_2 u(k) &= -\Gamma^T \lambda(k+1) = -\Gamma^T S(k+1)x(k+1) \\ Q_2 u(k) &= -\Gamma^T S(k+1) [\Phi x(k) + \Gamma u(k)] \\ [Q_2 + \Gamma^T S(k+1) \Gamma] u(k) &= -\Gamma^T S(k+1) \Phi x(k) \\ u(k) &= -\underbrace{[Q_2 + \Gamma^T S(k+1) \Gamma]^{-1} \Gamma^T S(k+1) \Phi x(k)}_{K(k)} \end{aligned}$$

Par construction, la séquence de commande est proportionnelle à l'état !

$$\text{comme } u(N) = 0, \quad K(N) = 0$$