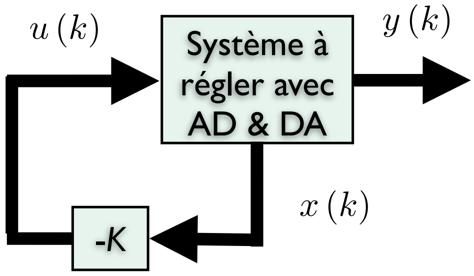
# Commande d’état

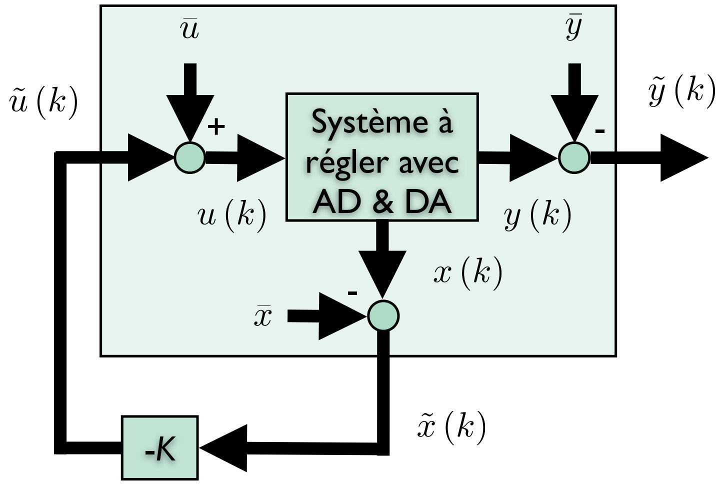
Système à régler

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\
y(k) &= C x(k) + D u(k)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\tilde{x}(k+1) &= \Phi \tilde{x}(k) + \Gamma \tilde{u}(k) \\
\tilde{y}(k) &= C \tilde{x}(k) + D \tilde{u}(k)
\end{aligned}
$$

Régulateur

$$u(k) = -Kx(k) \qquad \tilde{u}(k) = -K\tilde{x}(k)$$






# Résumé commande d’état SISO

Système à régler

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\
y(k) &= C x(k) + D u(k)
\end{aligned}
$$

Commande

$$u(k) = -Kx(k)$$

Système en boucle fermée (BF)

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= (\Phi - \Gamma \mathrm{K}) x(k) &= \Phi_{bf} x(k) \\
y(k) &= (C - DK) x(k) &= C_{bf} x(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_c(\lambda) &= \det(\lambda I - \Phi_{bf}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \\
&= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots \lambda a_{n-1} + \alpha_n = 0
\end{aligned}
$$

Formule d’Ackermann

$$
\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} G^{-1} \alpha_c(\Phi) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \ldots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}^{-1} \alpha_c(\Phi)
\end{aligned}
$$

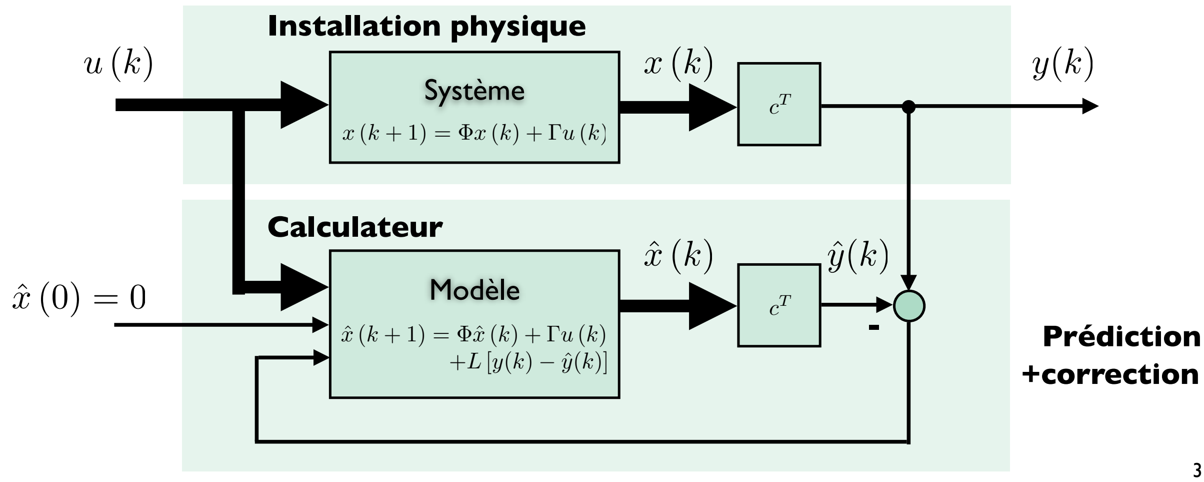
# Estimation d'état

Système à observer
$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= c^T x(k) \end{aligned}$$

Observateur $\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L\left[y(k) - \hat{y}(k)\right]$

Erreur d'estimation $\delta(k+1) = \left[\Phi - Lc^T\right]\delta(k) = \Phi_e \delta(k)$

$$\alpha_e(\lambda) = \det(\lambda I - \Phi_e) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\dots(\lambda - \beta_n) = \det(\lambda I - \Phi + Lc^T) = 0$$






# Résumé estimation d'état SISO

Système à observer
$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= c^T x(k) \end{aligned}$$

Observateur $\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L\left[y(k) - \hat{y}(k)\right]$

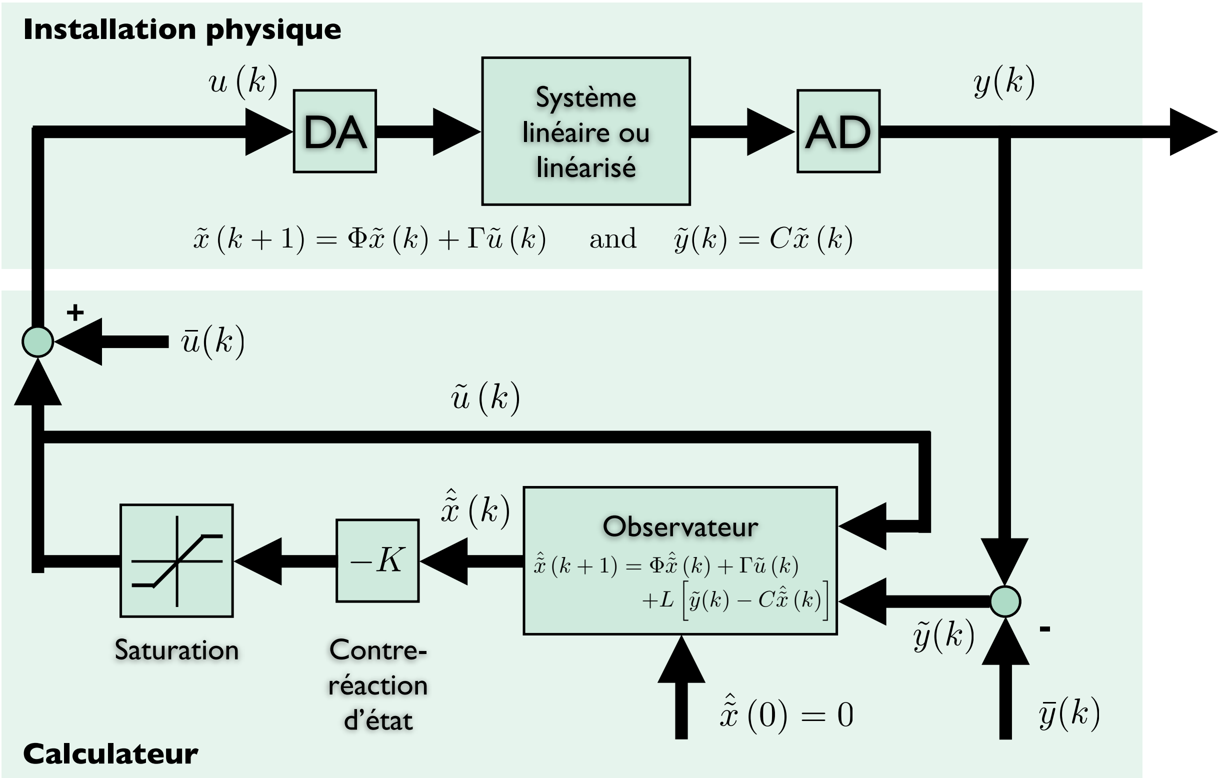
$$\begin{aligned} \delta(k) &= \hat{x}(k) - x(k) \qquad \text{Erreur d'estimation} \\ \delta(k+1) &= \hat{x}(k+1) - x(k+1) \\ &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + Lc^T\left[x(k) - \hat{x}(k)\right] - \Phi x(k) - \Gamma u(k) \\ &= \left[\Phi - Lc^T\right]\delta(k) = \Phi_e \delta(k) \end{aligned}$$

$$\alpha_e(\lambda) = \det(\lambda I - \Phi_e) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\dots(\lambda - \beta_n) = 0$$

Formule d'Ackermann pour l'observateur

$$L = \alpha_e(\Phi) Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_e(\Phi) \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \Phi \\ \vdots \\ c^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Structure complète de la commande d'état








## Gouvernabilité (livre 13.10.1)

Système MIMO (polycopié)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Notation livre !

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Est-il possible de passer d'un état arbitraire connu $x(0) = x_0$ à un état donné $x_1$ quelconque en appliquant une séquence finie de $K$ commandes $u(0), u(1), \ldots, u(K-1)$ telle que $x(K) = x_1$ ?

Le système est **gouvernable** ou **commandable** si et seulement si le rang de la **matrice de gouvernabilité** ou **matrice de commandabilité** vaut $n$

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times nr}$$

$$G = \left[\begin{array}{cccc} \Gamma & \Phi\Gamma & \ldots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times nr}$$ Notation polycopié !

# Gouvernabilité (livre 13.10.1)

$$x_1 = x(K) = A^K x(0) + \sum_{\ell=0}^{K-1} A^{K-1-\ell} B u(\ell)$$

$$x_1 - A^K x(0) = A^{K-1}Bu(0) + A^{K-2}Bu(1) + \ldots + ABu(K-1) + Bu(K-1)$$

$$x_1 - A^K x(0) = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{K-2}B & A^{K-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(K-1) \\ u(K-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Pour $K = n$ et si la matrice de gouvernabilité est régulière, ce système de $n$ équations possède une solution (unique si $r = 1$, multiple sinon)

Un changement de base dans l'espace d'état n'affecte pas la gouvernabilité

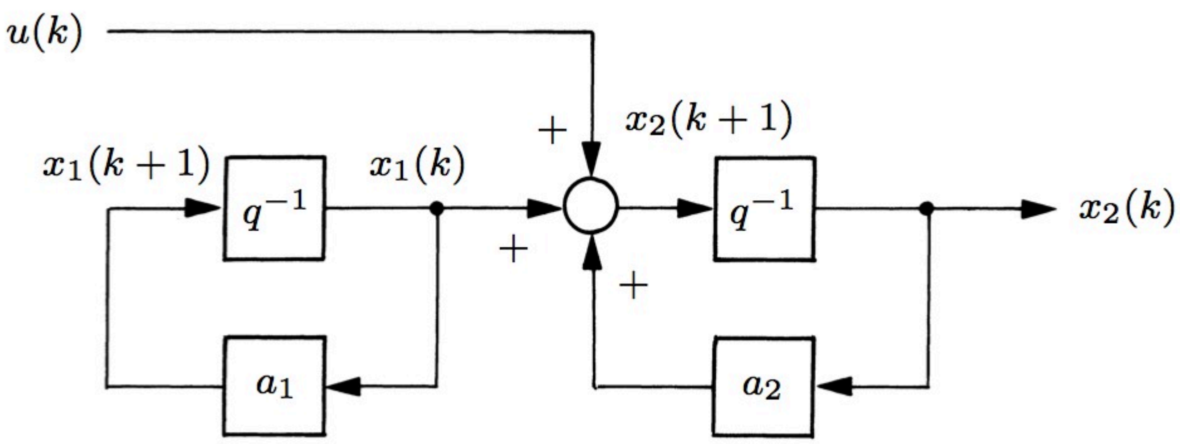




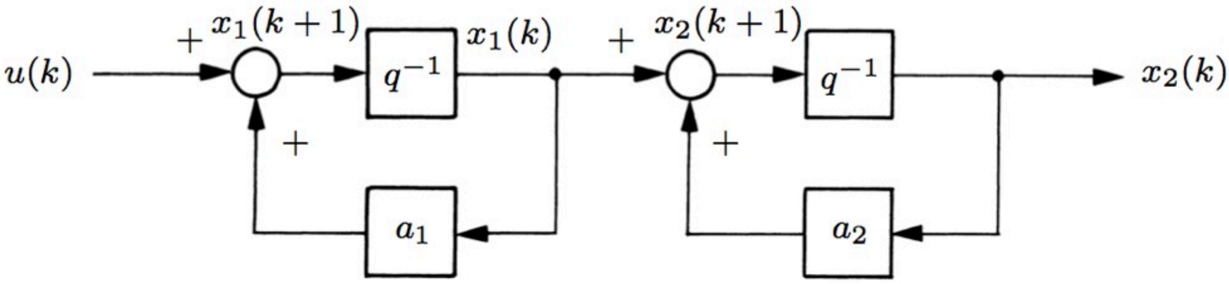
# Gouvernabilité (livre 13.10.1)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}$$



# Gouvernabilité (livre 13.10.1)




$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Observabilité (livre 13.10.2)

Système MIMO (polycopié)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Notation livre !

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Ce système est **observable** si, pour tout état initial *x*(0), il existe un entier fini *K* tel que la connaissance des vecteurs d'entrée $u(0), u(1), \ldots, u(K-1)$ et des vecteurs de sortie $y(0), y(1), \ldots, y(K-1)$ permet de déterminer de façon unique l'état initial *x*(0)

Le système est ***observable*** si et seulement si le rang de la matrice d'observabilité suivante vaut *n*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

# Observabilité (livre 13.10.2)

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) = CA^k x(0) + C \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-1-\ell} Bu(\ell) + Du(k)$$

$$y(k) - C \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-1-\ell} Bu(\ell) - Du(k) = CA^k x(0)$$

$$\tilde{y}(k) = CA^k x(0)$$

$$\text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, K-1 : \quad \left[ \begin{array}{c} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}(1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(K-1) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{array} \right] x(0)$$

… *pK* équations algébriques dont l'inconnue est le vecteur *x*(0)

Si le rang de la matrice d'observabilité vaut *n* et en posant *K* = *n*, alors nous avons *n* équations linéairement indépendantes qui permettent de déterminer de manière unique *x*(0)

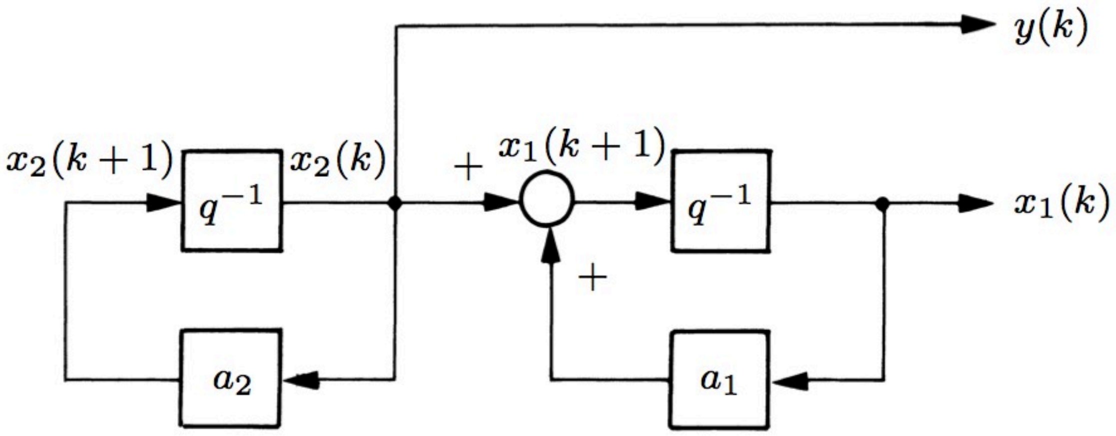


# Observabilité (livre 13.10.2)

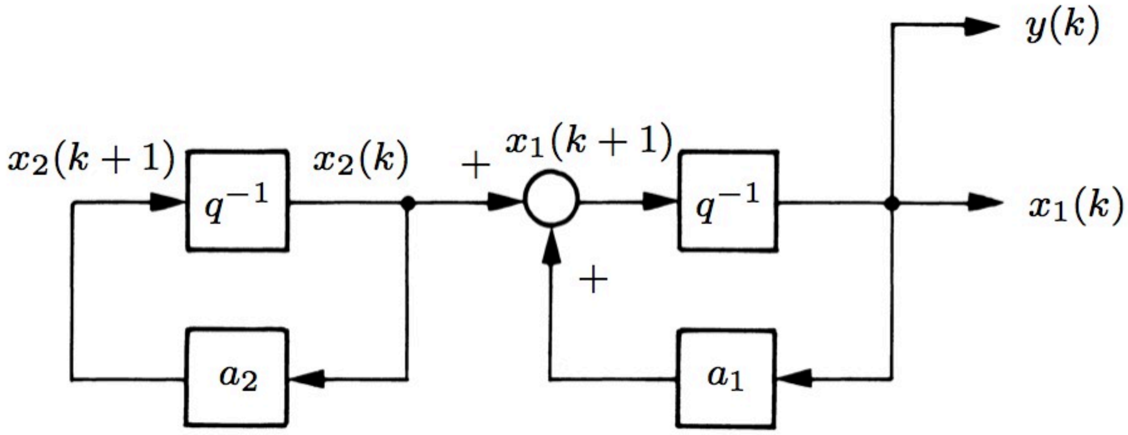
$$x(k+1) = \left[ \begin{array}{cc} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{array} \right] x(k)$$

$$y(k) = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] x(k)$$

$$\mathcal{O} = \left[ \begin{array}{c} C \\ CA \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & a_2 \end{array} \right]$$



# Observabilité (livre 13.10.2)



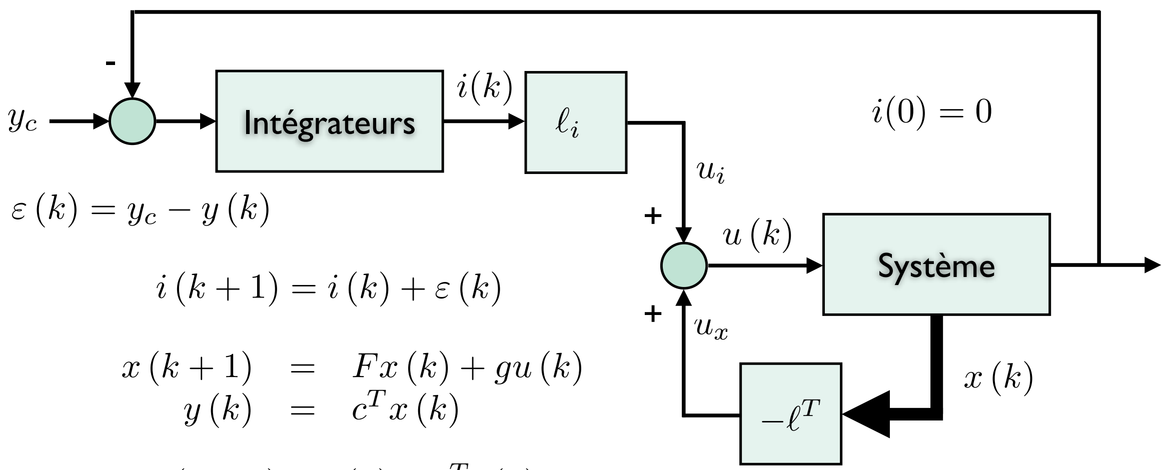

$$x\left(k+1\right)=\left[\begin{array}{cc} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{array}\right]x\left(k\right)$$

$$y\left(k\right)=\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right]x\left(k\right)$$

$$\mathcal{O}=\left[\begin{array}{c} C \\ CA \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{array}\right]$$



# Régulateur avec intégrateur (livre 14.3.3)




$$\varepsilon\left(k\right)=y_c-y\left(k\right)$$

$$i\left(k+1\right)=i\left(k\right)+\varepsilon\left(k\right)$$

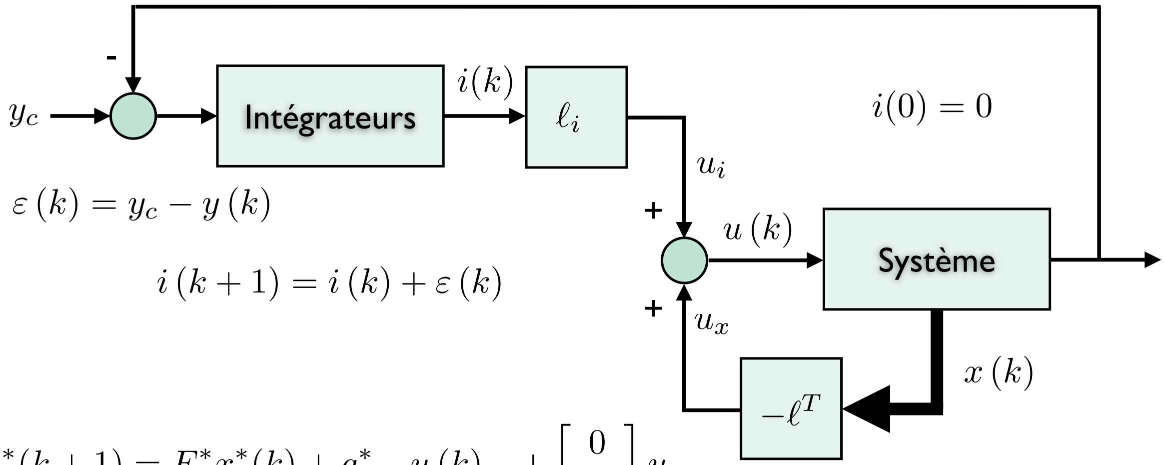
$$\begin{array}{rcl} x\left(k+1\right) & = & Fx\left(k\right)+gu\left(k\right) \\ y\left(k\right) & = & c^Tx\left(k\right) \end{array}$$

$$i\left(k+1\right)=i\left(k\right)-c^Tx(k)+y_c$$

$$\left[\begin{array}{c} x\left(k+1\right) \\ i\left(k+1\right) \end{array}\right]=\underbrace{\left[\begin{array}{cc} F & 0 \\ -c^T & 1 \end{array}\right]}_{F^*}\left[\begin{array}{c} x\left(k\right) \\ i\left(k\right) \end{array}\right]+\underbrace{\left[\begin{array}{c} g \\ 0 \end{array}\right]}_{g^*}u\left(k\right)+\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]y_c$$

$$u\left(k\right)=-\underbrace{\left[\begin{array}{cc} \ell^T & \ell_i \end{array}\right]}_{\ell^{T*}}\left[\begin{array}{c} x\left(k\right) \\ i\left(k\right) \end{array}\right]=u_x+u_i$$

# Régulateur avec intégrateur (livre 14.3.3)




$$\varepsilon(k) = y_c - y(k)$$

$$i(k+1) = i(k) + \varepsilon(k)$$

$$x^*(k+1) = F^* x^*(k) + g^* \underbrace{u(k)}_{-\ell^{T*} x^*(k)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_c$$

Imposer les *n* + 1 valeurs propres de $F^*_{bf} = F^* - g^* \ell^{T*}$



# Entraînement: Exemple 14.7 (livre)

On reprend l'entraînement électrique en vitesse de l'exemple 1.5, soumis à un couple résistant constant $M_r$ :

$$\dot{\omega}(t) + \frac{1}{J}\left(f + \frac{(K\Phi)^2}{R}\right)\omega(t) = \frac{K\Phi}{JR}\left(u(t) - \frac{R}{K\Phi} M_r\right)$$

Les valeurs numériques (1.11) et (1.12) sont adoptées :

$$\frac{1}{J}\left(f + \frac{(K\Phi)^2}{R}\right) = 2$$
$$\frac{K\Phi}{JR} = 4$$

D'où, avec $x(t) = y(t) = \omega(t)$ et $w = -\frac{R}{K\Phi} M_r$, le modèle d'état d'ordre 1 :

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 4u(t) + 4w$$
$$y(t) = x(t)$$

# Entraînement: Exemple 14.7 (livre)

Après échantillonnage, avec $h = 0,025$ s :

$$x(k+1) = 0{,}95\,x(k) + 0{,}0975\,u(k) + 0{,}0975\,w$$
$$y(k) = x(k)$$

Plutôt que d'imposer un point de fonctionnement comme dans l'exemple 14.5, sujet à des imperfections car le modèle servant à son élaboration ne peut être parfait et de surcroît ne permettant pas de rejeter la perturbation, introduisons un intégrateur :

$$i(k+1) = i(k) + y_c - x(k)$$

Il en découle le modèle d'état augmenté d'ordre 2 :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0975 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_c + \begin{bmatrix} 0{,}0975 \\ 0 \end{bmatrix} w$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ i(k) \end{bmatrix}$$



# Entraînement: Exemple 14.7 (livre)

La rétroaction d'état complète s'écrit :

$$u(k) = \begin{bmatrix} -\ell & -\ell_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ i(k) \end{bmatrix}$$

Les paramètres $\ell$ et $\ell_i$ doivent être dimensionnés de manière à assigner les valeurs propres de la matrice (14.16), qui, dans cet exemple, est :

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 - 0{,}0975\,\ell & -0{,}0975\,\ell_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elles sont choisies égales à 0 et 0,58 ; ce sont les pôles en boucle fermée déjà sélectionnés dans l'exemple 10.15 pour un régulateur RST. Le polynôme caractéristique en boucle fermée doit par conséquent être $p(z) = z(z - 0{,}58) = z^2 - 0{,}58\,z$. On met à profit de la formule d'Ackermann :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ell & \ell_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} p\left( \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0975 & 0{,}0926 \\ 0 & -0{,}0975 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2 - 0{,}58 \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10{,}26 & 9{,}74 \\ 0 & -10{,}26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}35 & 0 \\ -1{,}37 & 0{,}42 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 14{,}05 & -4{,}31 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

# Entraînement: Exemple 14.7 (livre)

La consigne est un saut unité. Une perturbation $w = -\frac{R}{K\Phi} M_r = -0{,}5$ affecte le système au temps $t = 1$ s pour disparaître au temps $t = 2$ s.