Examen SCGC

Commande de procédés **Juin 2015**

NOM, PRENOM: ....db........

SIGNATURE: ....

Aucune feuille annexe SVP

Nul besoin de recopier des éléments du polycopié ;
si nécessaire, indiquer la page ou l'équation concernée.

	1
1	1
2	1
3	1
4	1+
5	1+
	6++

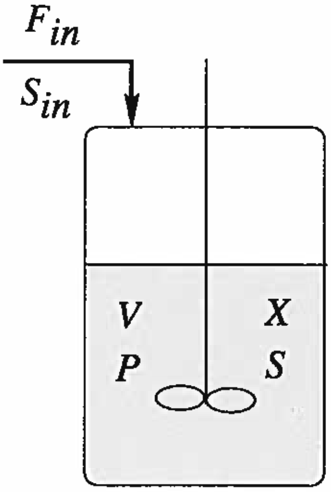


Figure 1. Bioréacteur semi-continu.

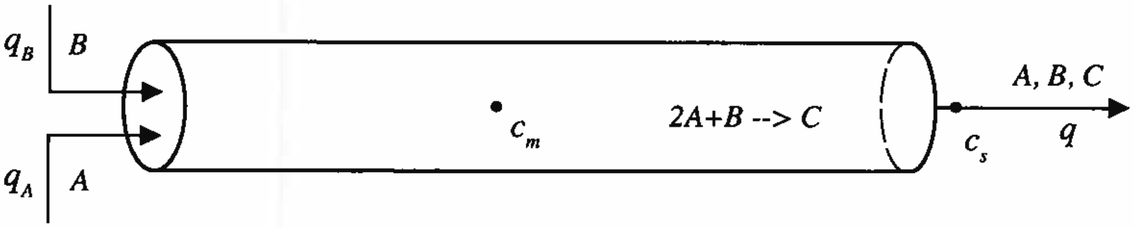


Figure 2. Réacteur tubulaire.

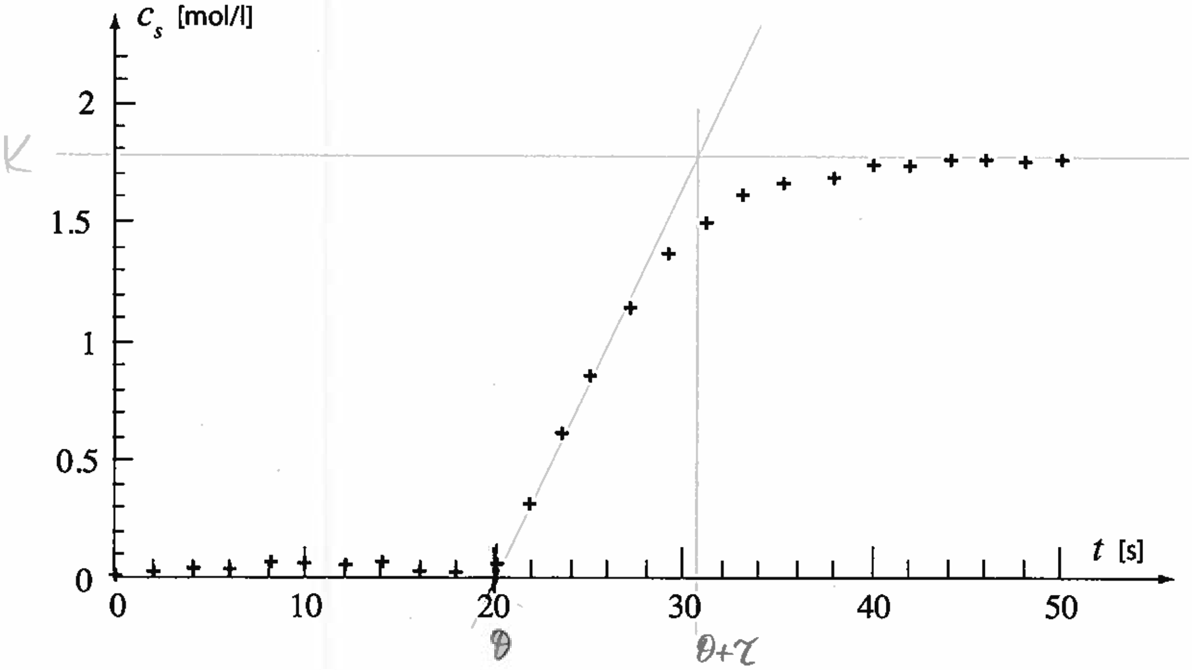


Figure 3. Réponse à un saut échelon de q_B.

$K = 1.78$

$\theta = 20$

$\tau = 10.5$

$$\frac{C_s(s)}{Q_B(s)} = \frac{1.78\, e^{-20 s}}{10.5\, s + 1}$$

Problème 1 (Modélisation et commande 1 point)

Considérons le réacteur semi-continu de la figure 1 pour la croissance microbienne S → X+ P (les variables et grandeurs caractéristiques sont définies à la page 288 du polycopié, version 2015, $X_{in}=0$).

a) Ecrire le modèle d'état correspondant pour les variables *X*, *S* et *V*.

b) Le modèle est-il lsc (linéaire, stationnaire et causal) ? Justifier.

c) Calculer le taux de dilution $D=F_{in}/V$ qui garde la concentration de biomasse constante. Quelle sera alors la dynamique du substrat correspondant ?

d) On peut également garder la concentration de biomasse constante à l'aide d'un schéma de rétroaction. Dessiner le schéma fonctionnel d'une régulation de la concentration de biomasse à l'aide du débit de substrat.

Réponses :

a)

0.25

$$\frac{d}{dt}(VX) = \mu V X \qquad \frac{d}{dt}(VS) = -k_S \mu V X + F_{in} S_{in} \qquad \frac{d}{dt} V = F_{in}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{X} = \mu X - \frac{F_{in}}{V} X \\ \dot{S} = -k_S \mu X + \frac{F_{in}}{V}(S_{in} - S) \\ \dot{V} = F_{in} \end{cases}$$

0.25 b) Modèle : NL, stationnaire et causal

c)

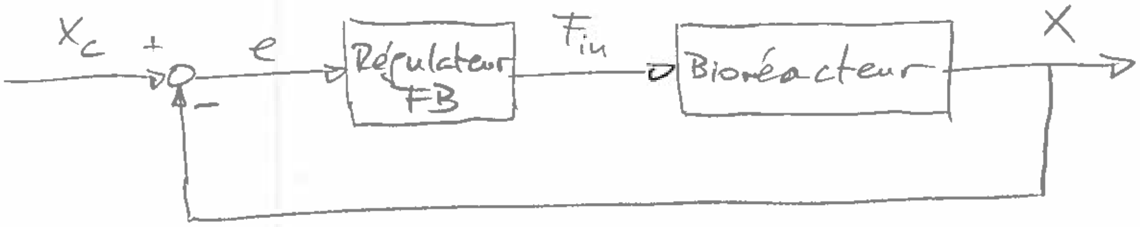
0,25

$$\dot{X} = 0 \rightarrow \mu X = D X \rightarrow D(t) = \mu(t) = \frac{\mu_{max} S(t}{K_S + S(t)}$$

$$\dot{S} = -k_S \mu X + \mu (S_{in} - S) = \mu (S_{in} - S - k_S X)$$

d)

0.25



(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 2 (Modèle d'état 1 point)

Soit le modèle d'un réacteur continu à volume variable pour la réaction A → B :

$$\dot V(t) = q(t) - \alpha V(t)$$

$$\dot c_A(t) = \frac{q(t)}{V(t)}\left(c_{A,in} - c_A(t)\right) - k c_A(t)$$

où V est le volume du réacteur, q le débit volumique du réactif A de concentration $c_{A,in} = 2$ mol/l, c_A sa concentration dans le réacteur, $k = 3\ \text{min}^{-1}$ la constante cinétique et $\alpha = 1\ \text{min}^{-1}$ une constante de proportionnalité. L'entrée est q et les sorties V et c_A.

a) Calculer l'état d'équilibre correspondant à $\bar q = 5$ l/min.

b) Linéariser le modèle d'état et calculer les matrices A, B et C.

c) Déterminer les gains statiques entre l'entrée q et les sorties V et c_A.

Réponses :

a) Etat d'équilibre correspondant à $\bar q$:

$$0 = \bar q - \alpha \bar V \qquad \longrightarrow \qquad \bar V = \frac{\bar q}{\alpha} = 5\,\ell$$

0.25

$$0 = \frac{\bar q}{\bar V}\left(c_{A,in} - \bar c_A\right) - k\bar c_A = \alpha\left(c_{A,in} - \bar c_A\right) - k\bar c_A$$

$$\longrightarrow \quad \bar c_A = \frac{\alpha c_{A,in}}{\alpha + k} = \frac{1 \cdot 2}{1+3} = 0.5\ \frac{mol}{\ell}$$

b) Terme NL: $f_2(V, c_A, q) = \frac{q}{V}\left(c_{A,in} - c_A\right) - k c_A$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial V}\Big|_{ss} = -\frac{\bar q}{\bar V^2}\left(c_{A,in} - \bar c_A\right) = -\frac{\alpha^2}{\bar q}\left(c_{A,in} - \bar c_A\right) = -\frac{\alpha^2 k}{\alpha + k}\,\frac{c_{A,in}}{\bar q}$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial c_A}\Big|_{ss} = -\frac{\bar q}{\bar V} - k = -(\alpha + k)$$

0.5

$$b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial q}\Big|_{ss} = \frac{1}{\bar V}\left(c_{A,in} - \bar c_A\right) = \frac{\alpha k}{\alpha + k}\,\frac{c_{A,in}}{\bar q}$$

Valeurs numériques:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0.3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Relations stationnaires:

(Si nécessaire, continuez au verso)

$$\bar V = \frac{\bar q}{\alpha} \quad \longrightarrow \quad K_1 = \frac{\partial \bar V}{\partial \bar q} = \frac{1}{\alpha} = 1$$

0.25

$$\bar c_A = \frac{\alpha c_{A,in}}{\alpha + k} \quad \longrightarrow \quad K_2 = \frac{\partial \bar c_A}{\partial \bar q} = 0$$

Problème 3 (Système linéaire 1 point)

Un système dynamique est donné par sa réponse impulsionnelle

$$g(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{5}}$$

a) Calculer sa fonction de transfert.

b) Evaluer l'ordre, le gain statique et les constantes de temps de ce système.

c) Indiquer les modes de la réponse indicielle du système (sans la calculer).

d) Calculer la réponse libre aux conditions initiales $y(0) = 1$ $\dot{y}(0) = -1$.

Réponses :

a) $g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{1}{5}} = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{5/2}{5s+1}$

0.25 $= \frac{-1/2(5s+1) + 5/2(s+1)}{(s+1)(5s+1)} = \frac{2}{(s+1)(5s+1)}$

b) Ordre 2, $K = 2$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 1$

0.25

c) Réponse indicielle : $Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{2}{s(s+1)(5s+1)}$

0.25 $= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{5s+1}$

$\rightarrow$ modes : $A\,\varepsilon(t)$, $B\,e^{-t}\varepsilon(t)$, $\frac{C}{5}e^{-t/5}\varepsilon(t)$

d) Eq. différentielle: $5\ddot{y} + 6\dot{y} + y = 2u$ $y(0) = 1$ $\dot{y}(0) = -1$

$\mathcal{L}$ $5\left[s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right] + 6\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = 2\,U(s)$

Réponse libre $U(s) = 0$

0.25 $\rightarrow Y(s)\left[5s^2 + 6s + 1\right] = 5s\,y(0) + 5\dot{y}(0) + 6\,y(0) = 5s + 1$

(Si nécessaire, continuez au verso)

$Y(s) = \frac{5s+1}{(5s+1)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

$\rightarrow y(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$

Problème 4 (Commande 1 point)

On souhaite commander c_s, la concentration du produit C à la sortie du réacteur tubulaire donné à la figure 2, en ajustant le débit volumique d'alimentation q_B. La perturbation principale est celle du débit q_A. La réponse à un saut échelon de q_B est donnée à la figure 3.

a) Identifier la fonction de transfert $G_P(s)=C_s(s)/Q_B(s)$.

b) Dimensionner un régulateur PI qui donne un comportement en boucle fermée sans dépassement.

c) Dessiner un schéma en cascade pour commander c_s en utilisant les mesures de c_m et c_s. Indiquer sur votre schéma les fonctions de transfert $G_{P,1}(s)=C_s(s)/C_m(s)$ et $G_{P,2}(s)= C_m(s)/Q_B(s)$.

d) **Question bonus (0.25 point)**: Par rapport à $G_P(s)$, la fonction de transfert $G_{P,2}(s)$ a un gain statique qui vaut les 2/3, une constante de temps dominante et un retard pur qui valent la moitié. En déduire la fonction de transfert $G_{P,1}(s)$.

Réponses :

0.25 a) Figure 3 $\rightarrow$ $\dfrac{C_s(s)}{Q_B(s)} = \dfrac{1.78\, e^{-20s}}{10.5s+1}$

$K = 1.78$

$\theta = 20$

$\tau = 10.5$

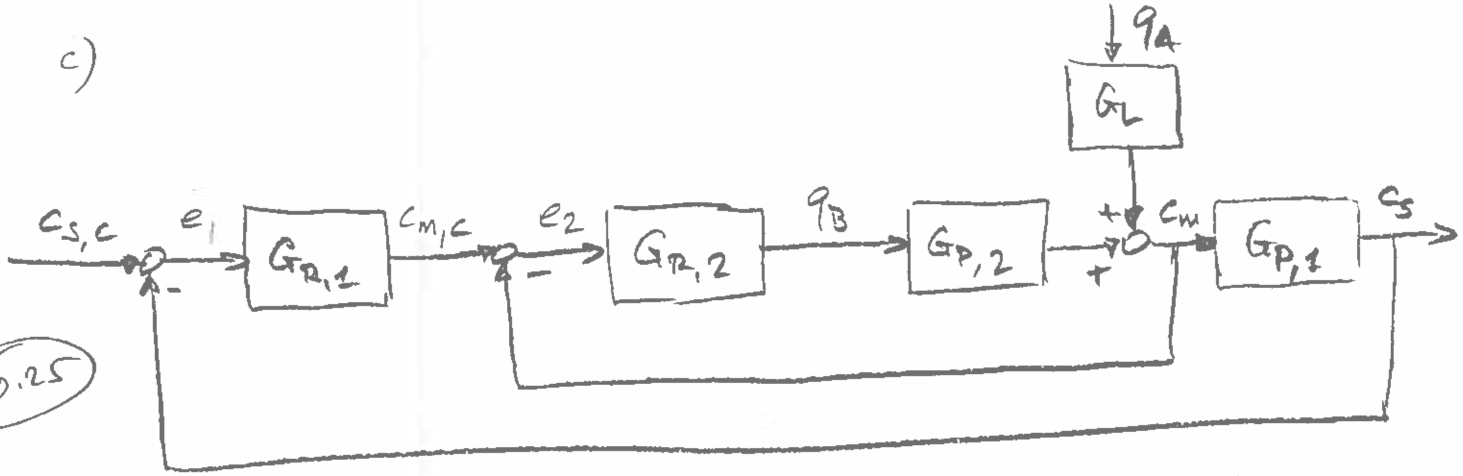
0.5 b) Spécification du système bouclé $G_{BF}(s) = \dfrac{e^{-20s}}{5s+1}$

$\rightarrow$ Régulateur PI (polycopié p. 201):

$$K_R = \frac{\tau}{K(\tau_{BF}+\theta)} = \frac{10.5}{1.78(5+20)} = 0.24$$

$$\tau_I = \tau = 10.5\ s$$

c)



0.25

0.25 d) $$\underbrace{\frac{C_s(s)}{C_m(s)}}_{G_{P,1}(s)} = \underbrace{\frac{C_s(s)}{Q_B(s)}}_{G_P(s)} \underbrace{\frac{Q_B(s)}{C_m(s)}}_{(G_{P,2}(s))^{-1}}$$

$$G_p(s) = \frac{1.78\, e^{-20s}}{10.5s+1}$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

$$G_{P,2}(s) = \frac{1.19\, e^{-10s}}{5.25s+1}$$

$$\rightarrow G_{P,1}(s) = \frac{1.78\, e^{-20s}}{10.5s+1} \; \frac{5.25s+1}{1.19\, e^{-10s}} = \frac{1.5\,(5.25s+1)}{10.5s+1}\, e^{-10s}$$

Problème 5 (Systèmes dynamiques 1 point)

a. Calculer *y*(t) correspondant à $Y(s) = \frac{2e^{-s}}{(s+1)^2}$.

b. Calculer la fonction de transfert *Y*(s)/*U*(s) pour le système dynamique suivant :

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y^2 = 5u$$

c. Le bilan d'énergie pour une cuve chauffée a donné

$$V\rho c_p \dot{T}(t) = wc_p\left[T_e(t) - T(t)\right] + P(t)$$

où *P* est la puissance de chauffe et *T* la température de la cuve chauffée. Calculer le gain statique et la constante de temps de ce système.

d. **Question bonus (0.25 point)**: Ecrire la fonction de transfert d'un système dynamique caractérisé par deux pôles (à 0 et -2), un zéro à -5, un gain en vitesse de 2 et un retard pur de 0,2.

Réponses :

a) $Y(s) = Y'(s)\, e^{-s}$ $\quad Y'(s) = \frac{2}{(s+1)^2} \rightarrow y'(t) = 2te^{-t}\varepsilon(t)$

(0.25) $\rightarrow y(t) = 2(t-1)\, e^{-(t-1)}\, \varepsilon(t-1)$

b) système NL $\xrightarrow{\text{linéarisation}}$ $\ddot{y} + 2\dot{y} + (2\bar{y})y = 5u$

(0.25) $\rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 2\bar{y}}$

c) système linéaire $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $V\rho c_p\, sT(s) = wc_p\left[T_e(s) - T(s)\right] + P(s)$

$$\Rightarrow \frac{T(s)}{P(s)} = \frac{1}{V\rho c_p s + wc_p} = \frac{1/wc_p}{\frac{V\rho}{w}s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

(0.5)

$$K = \frac{1}{wc_p}$$

$$\tau = \frac{V\rho}{w}$$

d)

(0.25) $G(s) = \frac{2\left(\frac{1}{5}s + 1\right)}{s\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}\, e^{-0.2s}$

(Si nécessaire, continuez au verso)