Examen SCGC

Commande de procédés **Juin 2012**

NOM, PRENOM: db

SIGNATURE: ....

Aucune feuille annexe SVP

	1
1	1+
2	1
3	1
4	1+
5	1
	6++

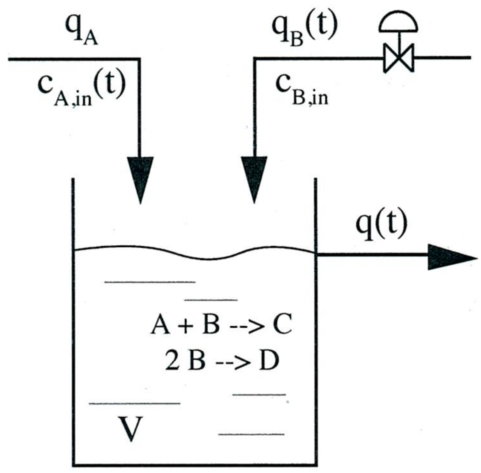
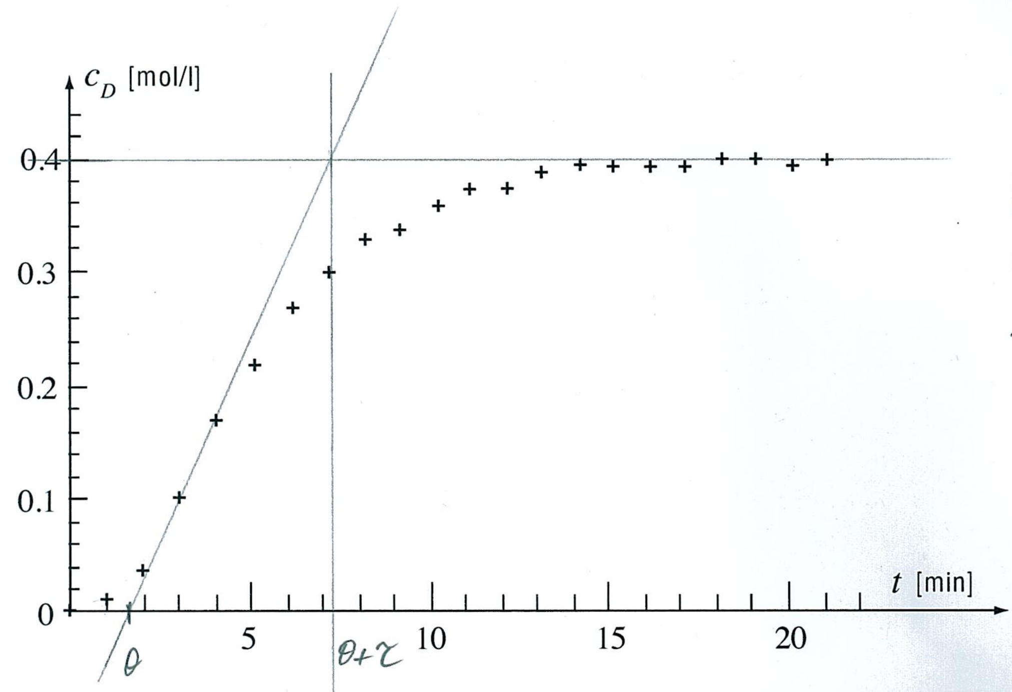


Figure 1. Réacteur continu



K = 0.4

θ = 1.6 min

τ = 5.6 min

Figure 2. Réponse à un saut unité de q_B

Problème 1 (Modélisation 1 point)

Un médicament est pris oralement N fois par jour. Chaque pilule contient 12 [mg] de substance active. Pour faciliter la modélisation, on représente cette prise de médicament par un débit continu moyen [mg/h]. La quantité de ce médicament dans l'intestin est notée m_i [mg]. Le médicament entre ensuite dans le système sanguin à la vitesse $r_s = k_s m_i$ [mg/h] d'où il est transféré au métabolisme à la vitesse $r_m = k_m m_s$ [mg/h], où m_s [mg] représente la quantité de médicament dans le sang. Les coefficients de vitesse valent respectivement $k_s =$ 1 [1/h] et $k_m = 0.25$ [1/h].

a) Ecrire les équations dynamiques pour représenter la quantité de médicament dans le sang en fonction de N.

b) En régime permanent, déterminer le nombre de pilules journalières nécessaires pour avoir en moyenne 10 [mg] de médicament dans le sang.

c) Calculer la fonction de transfert $M_s(s)/N(s)$.

d) **Question bonus (0.25 point)**: Calculer la valeur numérique du gain statique. Quelle est sa signification physique ?

Réponses :

a) vitesse moyenne : $v = \dfrac{N \cdot 12}{24} \quad \dfrac{\frac{\text{pilules}}{\text{jour}} \; \frac{\text{mg}}{\text{pilules}}}{\frac{\text{h}}{\text{jour}}} = 0.5\, N \; \dfrac{\text{mg}}{\text{h}}$

0.5

$$\frac{dm_i}{dt} = v - k_s m_i \qquad m_i(0) = m_{i0} \qquad (1)$$

$$\frac{dm_s}{dt} = k_s m_i - k_m m_s \qquad m_s(0) = m_{s0} \qquad (2)$$

b) En régime permanent

0.25

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \bar{v} - k_s \bar{m}_i \\ 0 &= k_s \bar{m}_i - k_m \bar{m}_s \end{aligned}\right\} \rightarrow \bar{v} = k_m \bar{m}_s \Rightarrow \bar{N} = 2 k_m \bar{m}_s$$

$$\bar{N} = 2 \cdot 0.25 \cdot 10 = \underline{\underline{5}} \; \frac{\text{pilules}}{\text{jour}}$$

c) $\mathcal{L}$ (1)+(2) :

$$M_i(s)\left[s + k_s\right] = 0.5\, N(s) \qquad \frac{M_i(s)}{N(s)} = \frac{0.5}{s + k_s}$$

$$M_s(s)\left[s + k_m\right] = k_s M_i(s) \qquad \frac{M_s(s)}{M_i(s)} = \frac{k_s}{s + k_m}$$

0.25

$$\frac{M_s(s)}{N(s)} = \frac{M_s(s)}{M_i(s)} \cdot \frac{M_i(s)}{N(s)} = \frac{0.5\, k_s}{(s + k_s)(s + k_m)}$$

d) $$K = \frac{\Delta m_s}{\Delta N} = \frac{0.5\, k_s}{k_s k_m} = \frac{0.5}{k_m} = 2 \; \frac{\text{mg}}{\text{pilule/jour}}$$

0.25

Chaque pilule journalière supplémentaire ajoute 2 mg de médicament dans le sang à l'état stationnaire.

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 2 (Fonction de transfert 1 point)

Soit le système dynamique $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=2\dot{u}+4u, \quad x(0)=2,\ \dot{x}(0)=0,\ u(0)=0$.

a) Evaluer la fonction de transfert X(s)/U(s). Quel est son ordre ?

b) Calculer la réponse à l'entrée $u(t)=\varepsilon(t)$ pour les conditions initiales données ?

c) Sans calculer la réponse, quelle est la valeur finale de x(t) pour l'entrée $u(t)=2(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$?

Réponses :

a) $\mathcal{L} \to \left[s^2 X(s) - 2s\right] + 3\left[s X(s) - 2\right] + 2X(s) = 2s\,U(s) + 4U(s)$

$X(s)\left[s^2+3s+2\right] = U(s)\left[2s+4\right] + 2s + 6 \qquad (1)$

0.25 $\quad \dfrac{X(s)}{U(s)} = \dfrac{2s+4}{s^2+3s+2} = \dfrac{2(s+2)}{(s+2)(s+1)} = \underline{\dfrac{2}{s+1}}$ $\qquad$ Ordre 1

b) $U(s) = \dfrac{1}{s}$

$(1) \to \ : \quad X(s) = \dfrac{2}{s(s+1)} + \dfrac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} = X_1(s) + X_2(s)$

0.5 $\quad X_1(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} \qquad A = \lim_{s\to 0} \dfrac{2}{s+1} = 2 \qquad B = \lim_{s\to -1} \dfrac{2}{s} = -2 \qquad x_1(t) = \varepsilon(t)\left[2 - 2e^{-t}\right]$

$X_2(s) = \dfrac{C}{s+1} + \dfrac{D}{s+2} \qquad C = \lim_{s\to -1} \dfrac{2(s+3)}{s+2} = 4 \qquad D = \lim_{s\to -2} \dfrac{2(s+3)}{s+1} = -2 \qquad x_2(t) = \varepsilon(t)\left[4e^{-t} - 2e^{-2t}\right]$

$\to \ x(t) = 2\,\varepsilon(t)\left[1 + e^{-t} - e^{-2t}\right]$

0.25 c) Système à l'état stationnaire : $2\bar{x} = 4\bar{u}$

Pour $\bar{u} = 2 \ \to \ \bar{x} = 2\bar{u} = \underline{4}$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 3 (Systèmes dynamiques 1 point)

Soit les systèmes dynamiques $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+3)^2}$ et $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_2^2 + 5u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + u \end{aligned}$.

a) Evaluer le gain statique, la constante de temps équivalente, le coefficient d'amortissement et le retard pur du premier système.

b) Calculer la réponse impulsionnelle du premier système.

c) Linéariser le deuxième système autour d'un point de fonctionnement stationnaire correspondant à $\bar{u} = 0$.

Réponses :

$K = 2/9$
$\tau = 1/3$
$\xi = 1$
Pas de retard pur

a) $G_1(s) = \frac{2}{s^2+6s+9} = \frac{2/9}{\frac{1}{9}s^2 + \frac{6}{9}s + 1} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1}$

0.25

b) $U(s) = 1 \qquad Y(s) = \frac{2}{(s+3)^2}$

0.25

$\longrightarrow \quad y(t) = 2\,t\,e^{-3t}\,\varepsilon(t)$

c) A l'état stationnaire pour $\bar{u} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2^2 \\ 0 &= \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &\bar{x}_1 = 2\bar{x}_2 \\ &0 = -4\bar{x}_2 + 3\bar{x}_2^2 = \bar{x}_2(-4 + 3\bar{x}_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}_{2,1} = 0 \qquad \bar{x}_{1,1} = 0$$
$$\bar{x}_{2,2} = \frac{4}{3} \qquad \bar{x}_{1,2} = \frac{8}{3}$$

0.5

Linéarisation $x_2^2 \simeq \bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_2\,\delta x_2$

Système linéarisé :
$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= -2\,\delta x_1 + 6\bar{x}_2\,\delta x_2 + 5\,\delta u \\ \delta\dot{x}_2 &= \delta x_1 - 2\,\delta x_2 + \delta u \end{aligned}$$

Pour $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$
$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 5u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + u \end{aligned}\right.$$

Pour $\bar{x}_1 = \frac{8}{3}$, $\bar{x}_2 = \frac{4}{3}$
$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 8x_2 + 5u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + u \end{aligned}\right.$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 4 (Commande 1 point)

On considère le réacteur continu donné à la figure 1 avec les deux réactions A + B → C et 2 B → D, où C est le produit désiré et D un produit indésirable. Le volume du réacteur est constant. La concentration $c_{A,in}$ représente une perturbation importante. Le débit d'alimentation q_B est la seule grandeur manipulable. On souhaite maintenir la concentration de D à la valeur maximale acceptable $c_{D,max}$.

a) Dessiner le schéma fonctionnel d'un système de commande feedback/feedforward en indiquant bien tous les signaux concernés.

b) Sachant que la réponse indicielle du système à commander est donnée à la figure 2, dimensionner le régulateur feedback pour la concentration c_D.

c) On a identifié l'effet de la concentration $c_{A,in}$ sur c_D comme suit : $\dfrac{C_D(s)}{C_{A,in}(s)} = \dfrac{-0.05e^{-2s}}{8s+1}$.

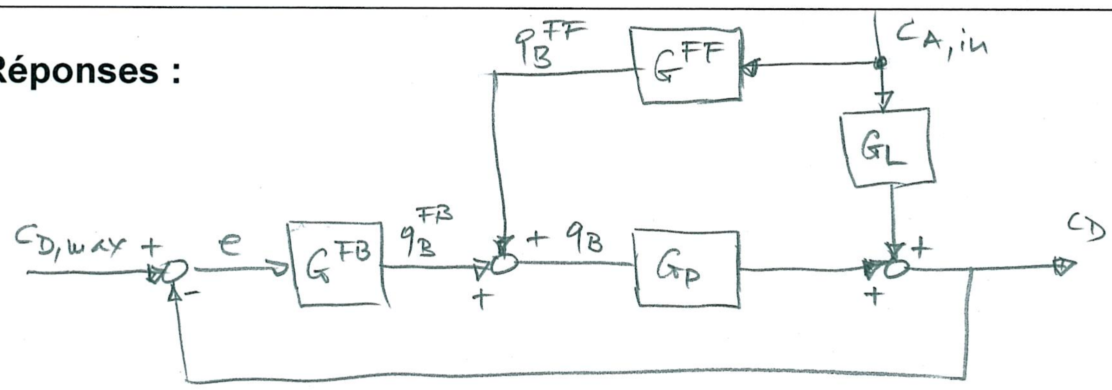
Dimensionner le régulateur feedforward en s'assurant qu'il soit réalisable.

d) **Question bonus (0.25 point)**: Représenter le régulateur feedforward du point c) par une équation différentielle?

Réponses :

a)

0.25



b) Figure 2 → $K = 0.4$ $\quad \theta = 1.6$ min $\quad \tau = 5.6$ min

0.5

Régulateur PI (ZN) $\quad K_R = 0.9\dfrac{\tau}{\theta K} = 0.9\dfrac{5.6}{1.6 \cdot 0.4} = 8.7$

$\tau_I = 3.33\,\theta = 3.33 \cdot 1.6 = 5.3$ min

c) $G^{FF} G_p + G_L = 0$

0.25

$$G^{FF} = -\frac{G_L}{G_p} = \frac{\dfrac{0.05e^{-2s}}{8s+1}}{\dfrac{0.4e^{-1.6s}}{5.6s+1}} = \frac{0.125(5.6s+1)e^{-0.4s}}{8s+1}$$

d) $\dfrac{Q_B^{FF}(s)}{C_{A,in}(s)} = \dfrac{(0.7s+0.125)e^{-0.4s}}{8s+1}$ $\qquad 8\dot{q}_B^{FF}(t) + q_B^{FF}(t) = 0.7\dot{c}_{A,in}(t-0.4) + 0.125\,c_{A,in}(t-0.4)$

$$\frac{Q_B^{FF}(s)}{C_{A,in}(s)} \simeq \frac{0.7s+0.125}{(8s+1)(0.4s+1)} = \frac{0.7s+0.125}{3.2s^2+8.4s+1}$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

0.25

$$3.2\ddot{q}_B^{FF} + 8.4\dot{q}_B^{FF} + q_B^{FF} = 0.7\dot{c}_{A,in} + 0.125\,c_{A,in}$$

Problème 5 (Stabilité 1 point)

Un système dynamique est donné par l'équation différentielle $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)=2u(t-1)$.

a) Le système correspondant est-il BIBO stable ? Quel est son gain statique ?

b) On souhaite commander ce système avec un régulateur P. Quelles sont les conditions sur le gain du régulateur pour que le système commandé soit stable ? (Représenter le retard pur par une approximation de Padé de premier ordre)

Réponses :

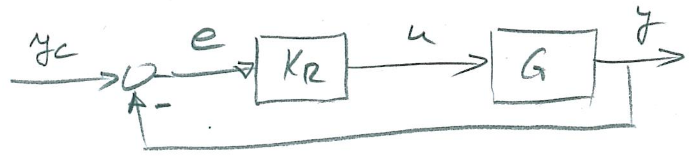
a) Fonction de transfert $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2e^{-s}}{s(s+2)}$

0.25

Pôles : 0 et -2 Pas BIBO stable car pôle à 0.

Gain statique ∞

b)



$G_{BF} = \dfrac{K_R G}{1+K_R G}$

0.25

Éq. car. $1+K_R G = 0$

$1+\dfrac{K_R 2 e^{-s}}{s(s+2)} = 0$

$s^2+2s+2K_R e^{-s} = 0$

Approximation de Padé de premier ordre :

0.25

$e^{-s} = \dfrac{e^{-s/2}}{e^{s/2}} \simeq \dfrac{1-\frac{s}{2}}{1+\frac{s}{2}}$

$s^2+2s+2K_R \dfrac{1-s/2}{1+s/2} = 0$ $\qquad \dfrac{s^3}{2}+2s^2+(2-K_R)s+2K_R=0$

Routh-Hurwitz

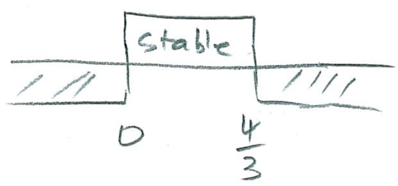
0.25

$\frac{1}{2} \quad 2-K_R$

$2 \quad 2K_R$

$2-\frac{3}{2}K_R \quad \rightarrow \quad K_R < \frac{4}{3}$

$2K_R \quad\quad K_R > 0$



(Si nécessaire, continuez au verso)