Examen SGM

Systèmes dynamiques **Juin 2012**

NOM, PRENOM: .....db.....

SIGNATURE: .....

Aucune feuille annexe SVP

	1
1	1+
2	1+
3	1
4	1
5	1
	6++

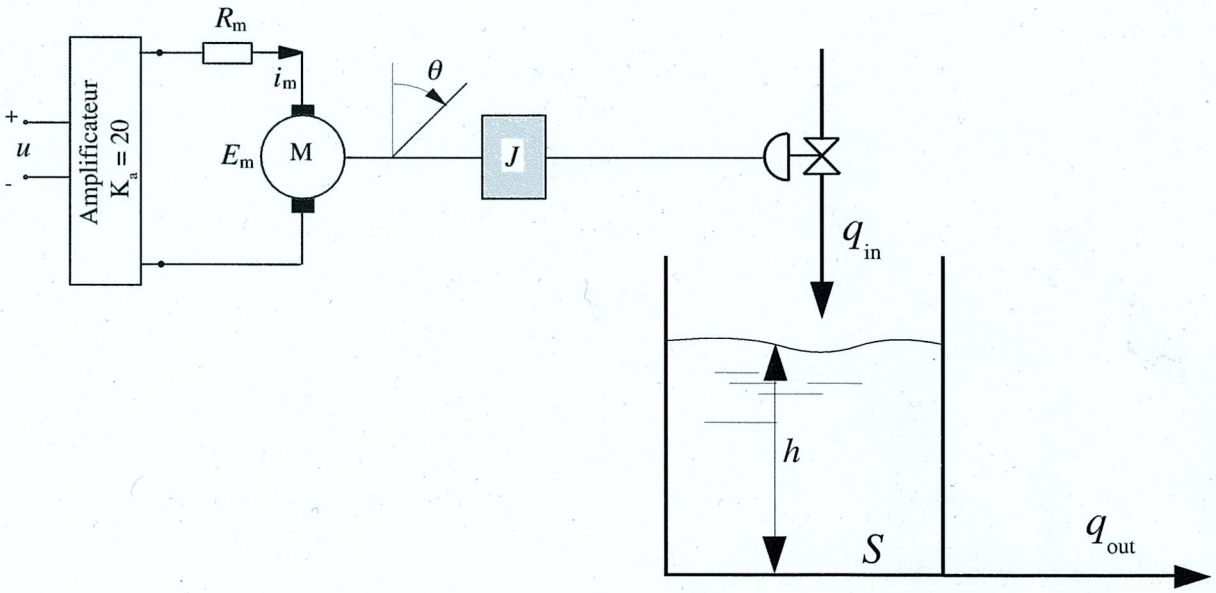


Figure 1. Réservoir avec vanne motorisée

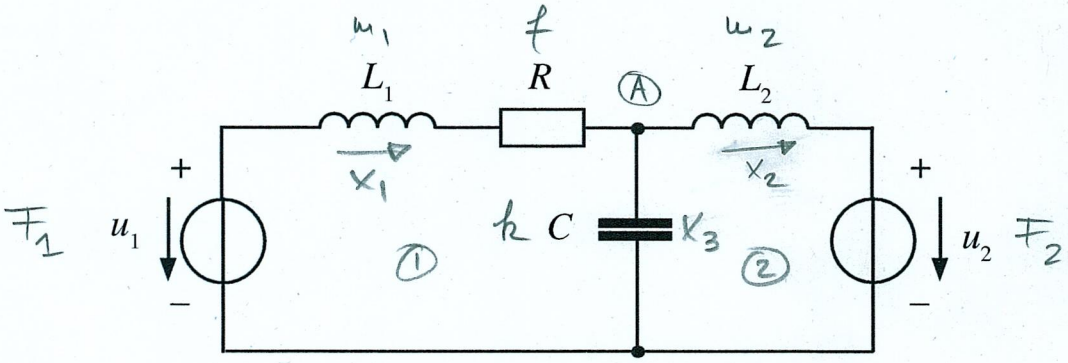
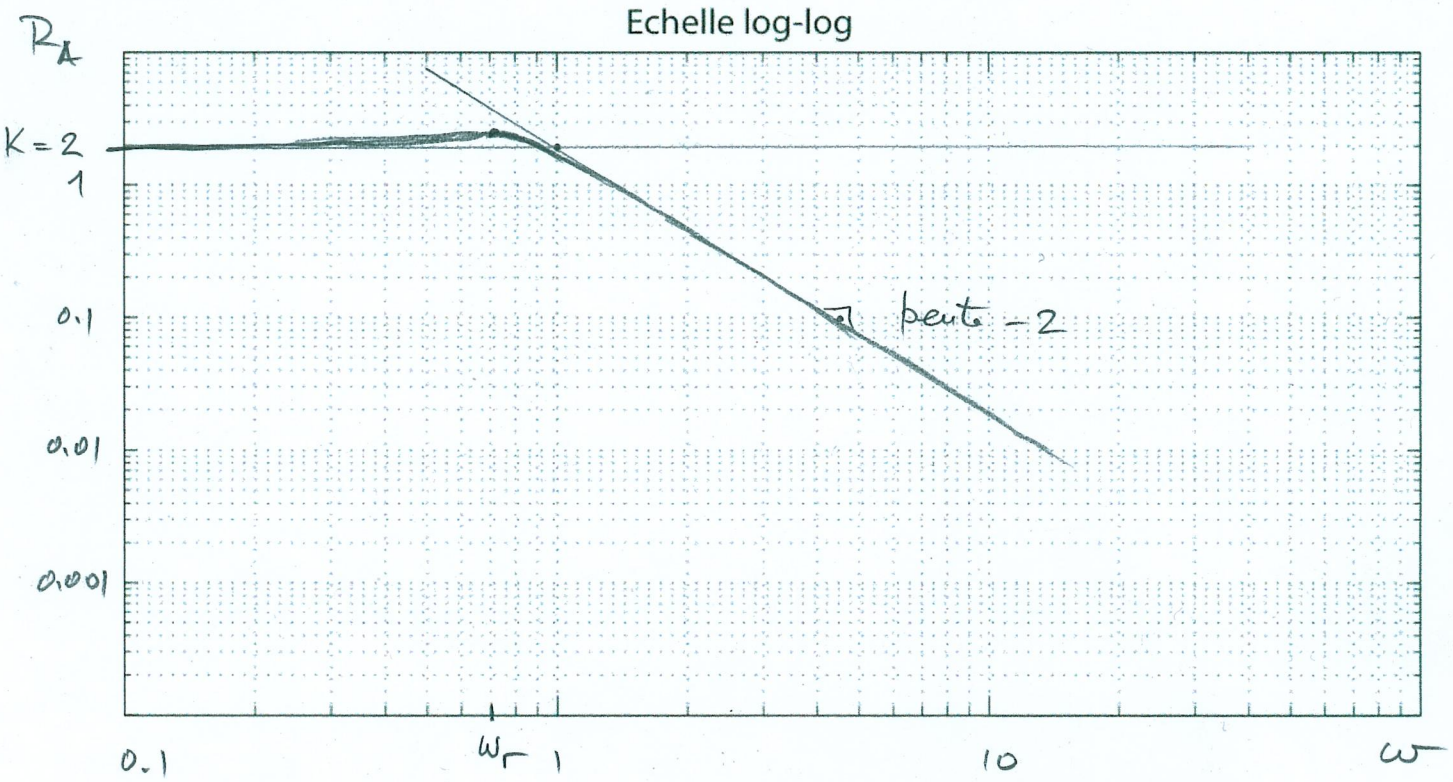


Figure 2. Circuit électrique



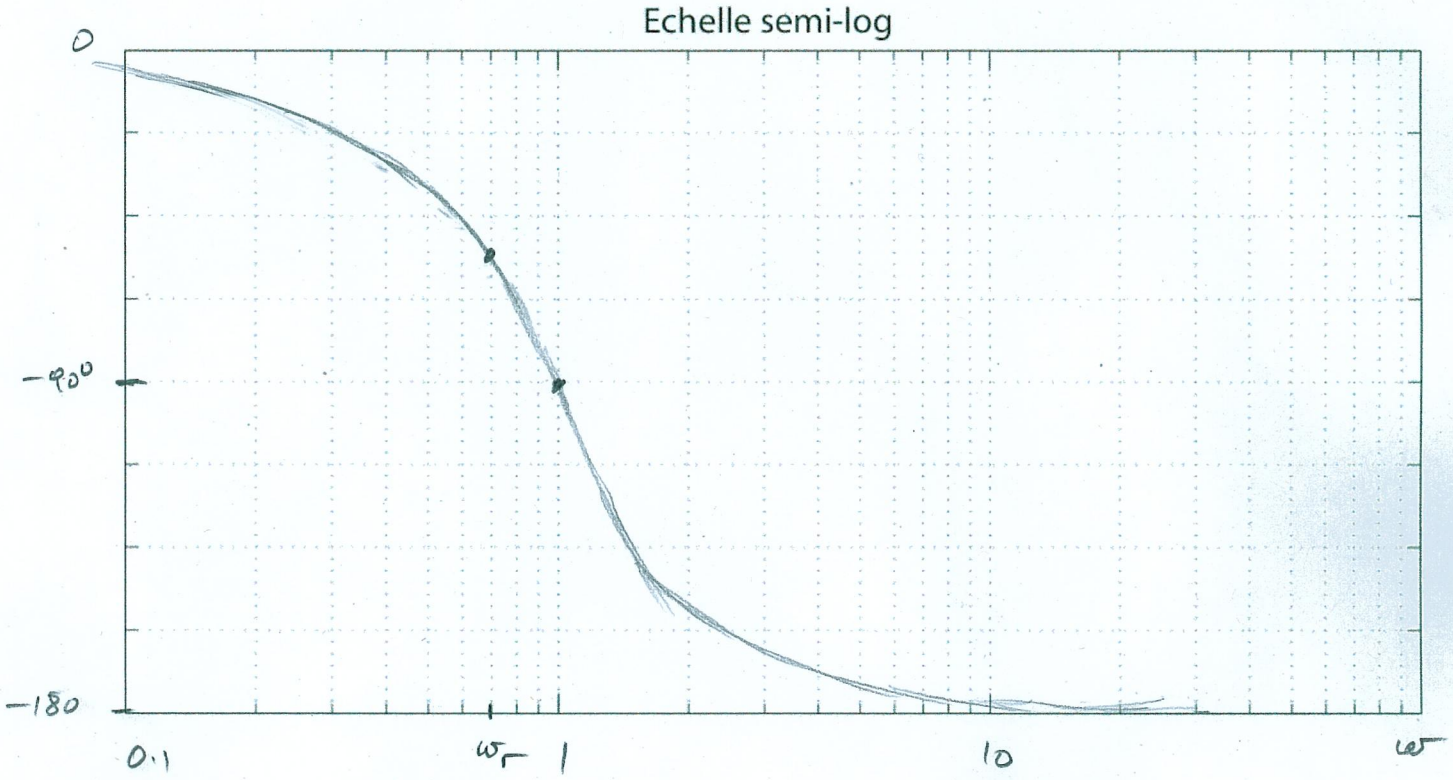


Figure 3. Diagramme de Bode

Problème 1 (Modélisation 1 point)

Soit la cuve avec vanne motorisée donnée à la figure 1. La cuve possède une section S de 50 m^2 et est remplie d'eau. Le débit volumique d'alimentation est proportionnel à la position θ, avec la constante de proportionnalité $\alpha = 0.16\ m^3/(min\ rad)$. Le débit de sortie est proportionnel à la racine carrée du niveau h, avec la constante de proportionnalité $k = 5\ m^{2.5}/min$. La tension d'alimentation u est amplifiée et commande la vanne par l'intermédiaire d'un moteur électrique caractérisé par la résistance $R_m = 50\ \Omega$ et la constante de moteur $K_m = 5$ V min/rad. Le moment d'inertie du moteur et de la vanne est $J = 10^{-4}$ kg m^2/rad. Le frottement est négligeable.

a) Ecrire les équations dynamiques pour ce système.

b) Déterminer la fonction de transfert H(s)/U(s) pour le point de fonctionnement correspondant à un niveau d'eau de 4 m.

c) **Question bonus (0.25 point)**: Calculer la valeur numérique du gain en vitesse.

Réponses :

a) $J\ddot{\theta} = K_m i_m$ (1)

$u_m = K_a u$

$R_m i_m + K_m \dot{\theta} - u_m = 0$

$\Big\}\ R_m i_m + K_m \dot{\theta} - K_a u = 0$ (2)

$J\ddot{\theta} = \frac{K_m}{R_m}\left(K_a u - K_m \dot{\theta}\right)$

0.5

$S\dot{h} = \alpha\theta - k\sqrt{h}$ (3)

b) Linéarisation: $\sqrt{h} \simeq \sqrt{\bar{h}} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}}}\delta h$

$\mathcal{L}$: (1) $J s^2 \Theta(s) = K_m I_m(s)$ (4)

(2) $R_m I_m(s) + K_m s\,\Theta(s) - K_a U(s) = 0$ (5)

0.5

(3) $H(s)\left[S s + \frac{k}{2\sqrt{\bar{h}}}\right] = \alpha\,\Theta(s) \longrightarrow \frac{H(s)}{\Theta(s)} = \frac{\alpha}{S s + \frac{k}{2\sqrt{\bar{h}}}}$

(4)+(5): $R_m J s^2 \Theta(s) = K_m\left[K_a U(s) - K_m s\,\Theta(s)\right]$

$\Theta(s)\left[R_m J s^2 + K_m^2 s\right] = K_m K_a U(s) \longrightarrow \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_m K_a}{s(R_m J s + K_m^2)}$

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{H(s)}{\Theta(s)}\,\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{\alpha K_m K_a}{s(R_m J s + K_m^2)\left(S s + \frac{k}{2\sqrt{\bar{h}}}\right)} = \frac{0.51}{s(2\cdot 10^{-4} s + 1)(40 s + 1)}$$

Bonus c) $K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \frac{\alpha K_m K_a}{K_m^2 \frac{k}{2\sqrt{\bar{h}}}} = \frac{\alpha K_a 2\sqrt{\bar{h}}}{K_m k} = \frac{0.16 \cdot 20 \cdot 4}{5 \cdot 5} = 0.51\ \frac{m}{min\,V}$

0.25

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 2 (Modélisation 1 point)

Soit le système électrique donné à la figure 2.

a) Modéliser ce système électrique.
b) Proposer un système mécanique qui lui soit analogue et le modéliser.
c) Introduire l'analogie (force/tension, déplacement/charge) pour montrer que les équations de ces deux systèmes sont bien équivalentes.
d) **Question bonus (0.25 point)**: L'ordre (minimal) de ces deux systèmes est trois. Proposer 3 variables d'état pour le système mécanique.

Réponses :

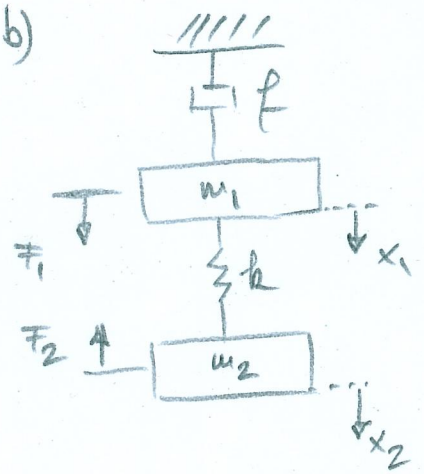
a) Tension boucle 1 : $L_1\dot{x}_1 + Rx_1 + x_3 = u_1$ (1)

— — 2 : $L_2\dot{x}_2 + u_2 = x_3$ (2)

0.25

Courant point A : $x_1 = x_2 + C\dot{x}_3$ (3)

b)



$m_1\ddot{x}_1 = F_1 - f\dot{x}_1 - k(x_1 - x_2)$ (4)

$m_2\ddot{x}_2 = -F_2 + k(x_1 - x_2)$ (5)

0.5

c) Analogie $F \leftrightarrow u$, $x \leftrightarrow q$

Introduisons les charges $q_1 = \int x_1 dt$ et $q_2 = \int x_2 dt$.

0.25

Intégrons (3) : $q_1 = q_2 + Cx_3$ (6)

(1) : $L_1\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = u_1$ (7)

(2) : $L_2\ddot{q}_2 + u_2 = \frac{1}{C}(q_1 - q_2)$ (8)

(7) + (8) sont équivalentes à (4) + (5). On voit bien que la force F_2 est vers le haut pour être équivalente à u_2.

Bonus d)

0.25

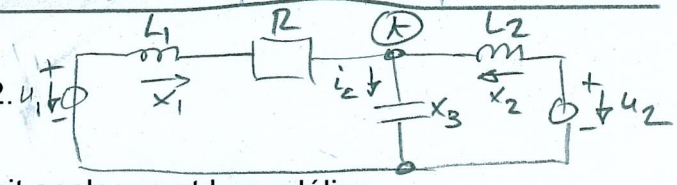
$z_{el} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}$ $z_{méc} = \begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_1 - x_2 \end{cases}$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Courants définis différemment

Problème 2 (Modélisation 1 point)

Soit le système électrique donné à la figure 2.



a) Modéliser ce système électrique.

b) Proposer un système mécanique qui lui soit analogue et le modéliser.

c) Introduire l'analogie (force/tension, déplacement/charge) pour montrer que les équations de ces deux systèmes sont bien équivalentes.

d) **Question bonus (0.25 point)**: L'ordre (minimal) de ces deux systèmes est trois. Proposer 3 variables d'état pour chaque système.

Réponses :

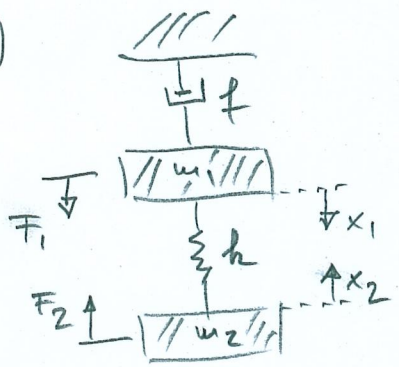
a) Tension boucle 1 : $L_1\dot{x}_1 + Rx_1 + x_3 = u_1$ (1)

— — 2 : $L_2\dot{x}_2 + x_3 = u_2$ (2)

0.25 Courant au point A : $x_1 + x_2 = i_c = C\dot{x}_3$ (3)

b)

0.5



$m_1\ddot{x}_1 = F_1 - f\dot{x}_1 - k(x_1+x_2)$ (4)

$m_2\ddot{x}_2 = F_2 - k(x_1+x_2)$ (5)

c) Analogie $F \leftrightarrow u$, $x \leftrightarrow q$

0.25 Introduisons les charges $q_1 = \int x_1 dt$ et $q_2 = \int x_2 dt$

Intégrons (3) : $q_1 + q_2 = Cx_3$ (6)

(1) : $L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1+q_2) = u_1$ (7)

(2) : $L_2\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}(q_1+q_2) = u_2$ (8)

(7)+(8) sont équivalentes à (4)+(5).

d)

0.25 $z_{el} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}$ $z_{méc} = \begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_1+x_2 \end{cases}$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 3 (Système dynamique 1 point)

Soit le système dynamique $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=2\dot{u}+4u, \quad x(0)=2,\ \dot{x}(0)=0,\ u(0)=0$.

a) Evaluer la fonction de transfert X(s)/U(s). Quel est son ordre ?

b) Calculer la réponse à l'entrée $u(t)=\varepsilon(t)$ pour les conditions initiales données.

c) Sans calculer la réponse, quelle est la valeur finale de x(t) pour l'entrée $u(t)=2(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$?

Réponses :

a) $\mathcal{L} \rightarrow \left[s^2X(s)-2s\right]+3\left[sX(s)-2\right]+2X(s)=2sU(s)+4U(s)$

0.25 $\quad X(s)\left[s^2+3s+2\right]=U(s)\left[2s+4\right]+2s+6 \qquad (1)$

$$\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{2(s+2)}{(s+2)(s+1)}=\frac{2}{s+1}$$

Ordre 1

b) $U(s)=\frac{1}{s}$

$$(1):\ X(s)=\frac{2}{s(s+1)}+\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+1)}=X_1(s)+X_2(s)$$

$$X_1(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1} \qquad A=\lim_{s\to 0}\frac{2}{s+1}=2 \qquad x_1(t)=\varepsilon(t)\left[2-2e^{-t}\right]$$

$$B=\lim_{s\to -1}\frac{2}{s}=-2$$

0.5

$$X_2(s)=\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s+1} \qquad C=\lim_{s\to -2}\frac{2(s+3)}{s+1}=-2 \qquad x_2(t)=\varepsilon(t)\left[-2e^{-2t}+4e^{-t}\right]$$

$$D=\lim_{s\to -1}\frac{2(s+3)}{s+2}=4$$

$$\Rightarrow \quad x(t)=2\,\varepsilon(t)\left[1+e^{-t}-e^{-2t}\right]$$

c) Système à l'état stationnaire : $2\bar{x}=4\bar{u}$

0.25 $\quad \bar{u}=2 \quad \rightarrow \quad \bar{x}=2\bar{u}=\underline{\underline{4}}$

(Si nécessaire, continuez au verso)

Problème 4 (Réponse temporelle 1 point)

Soit le système dynamique $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+3)^2}$ et l'entrée $u(t) = e^{-2t}$.

a) Déterminer le gain statique et le retard pur de ce système.

b) Sans calculer la réponse temporelle, évaluer qualitativement les modes constituant la réponse y(t).

c) Utiliser le *produit de convolution temporel* pour calculer la réponse y(t).

d) Mettre ce système sous la forme d'un modèle d'état.

Réponses :

a) $K = \lim_{s \to 0} \frac{2}{(s+3)^2} = \frac{2}{9}$ Pas de retard pur.

0.25

b) $U(s) = \frac{1}{s+2}$ $Y(s) = \frac{2}{(s+3)^2 (s+2)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{C}{s+2}$

0.25

Modes : Ae^{-3t}, Bte^{-3t} et Ce^{-2t}

c) $G(s) = \frac{2}{(s+3)^2} \longrightarrow g(t) = 2te^{-3t}$

$y(t) = \int_0^t u(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t u(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\, 2\tau e^{-3\tau}\, d\tau$

0.25

$= 2e^{-2t} \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$ $\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau \overset{IPP}{=} 1 - e^{-t} - te^{-t}$

$\rightarrow y(t) = 2\left[e^{-2t} - e^{-3t} - te^{-3t}\right]$

$A = -2$
$B = -2$
$C = 2$

d) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 2u$ $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$

$\dot{x}_1 = x_2$

0.25

$\dot{x}_2 = -6x_2 - 9x_1 + 2u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

(Si nécessaire, continuez au verso)

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Problème 5 (Réponse fréquentielle 1 point)

On a modélisé un système dynamique par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)=2u(t) \qquad y(0)=2,\ \dot{y}(0)=0\ .$$

a) Construire son diagramme de Bode dans le diagramme de la figure 3.

b) Calculer un filtre passe-bas de premier ordre $F(s)=\dfrac{K}{\tau s+1}$ qui permette d'avoir un système filtré avec un rapport d'amplitude de 1 et un déphasage de -3π/4 rad à la pulsation ω = 1 rad/s.

Réponses :

$K=2 \quad \tau=1 \quad 2\tau\xi=1 \quad \xi=0.5$

a) $G(s)=\dfrac{2}{s^2+s+1}$

$\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1 = s^2+s+1$

Pulsation de résonance $\omega_r=\dfrac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\tau}=0.707$

$R_A(\omega_r)=\dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=2.31$

$\varphi(\omega_r)=-\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right)=-0.955$ rad $=-54.7°$

0.5

$R_A=\dfrac{K}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\tau\xi\omega)^2}}$

$\varphi=-\arctan\left(\dfrac{2\tau\xi\omega}{1-\tau^2\omega^2}\right)$

A hautes fréquences :

$R_A \sim \dfrac{K}{\tau^2\omega^2}$

b) Système filtré $\quad G(s)F(s)=\dfrac{2K}{(s^2+s+1)(\tau s+1)}$

$R_A=\dfrac{2K}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$

0.5 $\varphi=-\arctan\left(\dfrac{\omega}{1-\omega^2}\right)-\arctan(\tau\omega)$

Pour $\omega=1$ rad/s

$R_A=\dfrac{2K}{\sqrt{1+\tau^2}}=1$

$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}-\arctan(\tau)=-\dfrac{3\pi}{4}$

$\longrightarrow \quad \tau=1 \quad K=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.707$

(Si nécessaire, continuez au verso)