Nom : .... **Prénom** : .... **Section** : ....

Examen de Systèmes multivariables I

Denis Gillet

21 janvier 2009

Matière

L'examen porte sur l'ensemble du polycopié *Systèmes multivariables I*, édition septembre 2008.

Forme

Examen écrit avec 5 problèmes à résoudre en présentant le détail des calculs.

Durée

3h00 dès que chaque candidat est installé à sa place assignée.

Supports autorisés

Tout document est autorisé.
Tout appareil électronique est **interdit** (machine à calculer également).

Déroulement

Les développements analytiques et les réponses finales doivent être rédigées sur des feuilles de réponse annexes.
Les réponses finales doivent être indiquées clairement et écrites au stylo.
Mettre prénom et nom sur la donnée et sur toutes les feuilles de réponse.
Contrôler que les feuilles de réponses ont été agrafées avec la donnée au moment du rendu.

Calcul de la note finale

1.0 point de présence,
5.0 points liés aux problèmes,
0.5 points maximum de bonus sur l'étude de cas, si obtenus.

Rappels mathématiques

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\xi(t)} = \frac{\dot{\xi}(t)}{2\sqrt{\xi(t)}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\xi(t)\,\zeta(t)\right] = \dot{\xi}(t)\,\zeta(t) + \xi(t)\,\dot{\zeta}(t)$$

$$\int_a^b \left[\dot{f}(t)\cdot g(t)\right]\mathrm{d}t = \left[f(t)\cdot g(t)\right]\Big|_a^b - \int_a^b \left[f(t)\cdot \dot{g}(t)\right]\mathrm{d}t$$

Problème 1 : Modèle d'état et linéarisation

Soit l'actionneur hydraulique commandé par un tiroir de distribution et dont le piston entraîne une charge de masse m et caractérisé par un frottement visqueux de coefficient f (figure ci-dessous). Le déplacement $u(t)$ (entrée du système) du tiroir de distribution, provoqué par une faible force pneumatique ou électromagnétique, permet le passage de l'huile sous pression qui viendra déplacer le piston de la distance $y(t)$ (sortie du système). Un tel actionneur hydraulique sert donc d'amplificateur de puissance. Les équations dynamiques vous sont données :

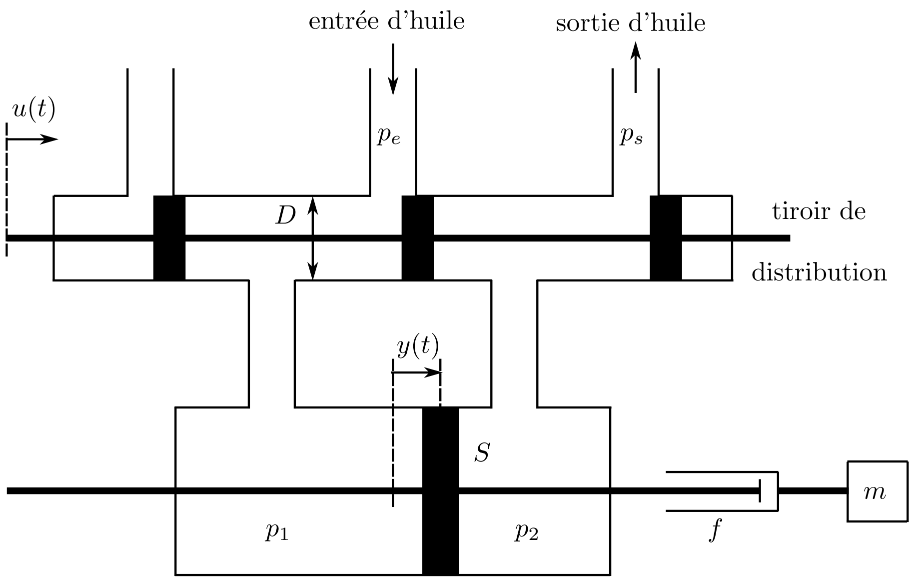
$$\begin{aligned} m\,\ddot{y} &= (p_1 - p_2)\,S - f\,\dot{y} \\ (V_0 + S\,y)\,\dot{p}_1 &= +\alpha\,u\,\sqrt{p_e - p_1} - \gamma\,\dot{y} \\ (V_0 - S\,y)\,\dot{p}_2 &= -\alpha\,u\,\sqrt{p_2 - p_s} - \gamma\,\dot{y} \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{\pi\,D\sqrt{2}}{\beta\sqrt{\rho}}$ et $\gamma = \frac{S}{\beta}$.

Tiroir de distribution :
- D est le diamètre du tiroir de distribution ;
- p_e et p_s sont les pressions constantes d'entrée et de sortie de l'huile.

Chambre du bas :
- S est la surface du piston ;
- p_1 et p_2 sont les pressions de part et d'autre de ce piston ;
- V_0 est le demi-volume de la chambre complète, donc le volume de part et d'autre du piston lorsque $y = 0$;
- β est le coefficient de compressibilité de l'huile ;
- ρ est la masse volumique de l'huile.

1. Ecrire le modèle d'état sous forme standard.
2. Soit $\overline{u} = 0$, $\overline{y} = 0$ et $\overline{p}_1 = \frac{pe+ps}{2}$; déterminer les autres grandeurs nominales manquantes.
3. Ecrire le modèle linéarisé autour du point de fonctionnement ci-dessus sous la forme standard $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\tilde{u}$, $\tilde{y} = \mathbf{C}\,\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\,\tilde{u}$, où les $\tilde{\xi} = \xi - \overline{\xi}$ sont des variables écarts.
4. Quels sont les avantages et les inconvénients de cette approche de linéarisation ?



Problème 2 : Linéarisation par contre-réaction

Soit le système dynamique SISO $\mathcal{M}$ d'entrée u et de sortie y suivant :

$$\ddot{y}(t) = \left(\frac{u(t)}{1 + y(t)}\right)^2$$

1. Ecrire le modèle du système $\mathcal{M}$.
2. Linéariser le système $\mathcal{M}$ par contre-réaction en définissant une nouvelle entrée $w(t)$. Donner le modèle inverse correspondant $\mathcal{M}^{-1}$. Dès mainteant, considérer le nouveau système $\mathcal{M}'$ ayant comme entrée w et comme sortie y.
3. Ecrire le modèle d'état du système $\mathcal{M}'$.
4. Montrer l'équivalence entre l'étude de la commande de $\mathcal{M}'$ et la conception d'un régulateur PD sur y.
5. Discrétiser $\mathcal{M}'$ avec une période d'échantillonnage h.
6. Est-ce que le système $\mathcal{M}'$ discrétisé est gouvernable ? Observable ?
7. Donner la matrice de gains de contre-réaction $\mathbf{K}$ en imposant une réponse pile en boucle fermée.
8. Donner la matrice de gains d'obervation $\mathbf{L}$ en imposant une réponse pile de l'estimation.
9. Dessiner le diagramme bloc du système complet. Faire apparaître clairement, dans chaque bloc, le label des équations nécessaires, numérotées soigneusement dans les différentes questions ci-dessus.

Problème 3 : Stabilité, gouvernabilité et observabilité

Soit le système MIMO discret suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{x}(k+1) & = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \\ \mathbf{y}(k) & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) \end{array}\right.$$

1. Ce système est-il intrinsèquement stable ?
2. Est-il possible de commander ce système avec une seule et unique entrée ? Si oui, la ou lesquelles ? Justifier.
3. Est-il possible d'observer l'état de ce système avec une seule et unique sortie mesurée ? Si oui, la ou lesquelles ? Justifier.
4. Quels sont les avantages et/ou inconvénients d'utiliser plus d'une entrée pour la commande et plus d'une sortie pour l'observation ?

Problème 4 : Discrétisation

Soit le système MISO continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

1. Calculer de manière analytique les matrices $\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{\Gamma}$ du modèle discrétisé avec une période d'échantillonnage h.
2. Quelles sont les valeurs propres du système discrétisé ? Le système est-il stable en boucle ouverte $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$?
3. En prenant la matrice de contre-réaction suivante :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   pour quelle(s) valeur(s) de α perd-on la stabilité en boucle fermée en fonction de h ?
4. Application numérique : $h = \ln(2)$. Que valent dans ce cas $\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{\Gamma}$? Qu'en est-il du α de la question précédente ?

Problème 5 : Commande optimale

Soit le modèle dynamique linéaire discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) & = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \\ \mathbf{y}(k) & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

1. Déterminer le gain stationnaire pour la commande LQR du système donné avec $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$ et $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$.

2. Déterminer itérativement $\mathbf{S}(k)$ et $\mathbf{K}(k)$ pour la commande optimale du système donné avec $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$ et $\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

3. Analyser la stabilité du système en boucle fermée pour le cas 1 et le cas 2. Discuter le résultat.

4. Expliquer qualitativement la différence sur la réponse du système en boucle fermée entre un choix de $q = 1$ et $q = 10$.