Nom : .... **Prénom** : .... **Section** : ....

Examen de Systèmes multivariables I

Denis Gillet

24 janvier 2008

Matière

L'examen porte sur l'ensemble du polycopié *Système multivariables I*, édition août 2007.

Forme

Examen écrit avec 5 problèmes à résoudre en présentant le détail des calculs.

Durée

3h00 dès que chaque candidat est installé à sa place assignée.

Supports autorisés

Tout document est autorisé.
Tout appareil électronique est **interdit** (machine à calculer également).

Déroulement

Les développements analytiques et les réponses finales doivent être rédigées sur des feuilles de réponse annexes.
Les réponses finales doivent être indiquées clairement et écrites au stylo.
Mettre prénom et nom sur la donnée et sur toutes les feuilles de réponse.
Contrôler que les feuilles de réponses ont été agrafées avec la donnée au moment du rendu.

Calcul de la note finale

1.0 point de présence,
5.0 points liés aux problèmes,
0.5 points de bonus sur l'étude de cas si obtenu.

Rappel mathématique

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Problème 1 : Synthèse d'un régulateur et d'un observateur (1.0 pt)

Soit le système linéaire discret SISO suivant, avec une période d'échantillonnage $h = 0.1\,[s]$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ \\ y(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

1. Déterminer la contre-réaction d'état K de façon à avoir les valeurs propres du système discret en boucle fermée en $\lambda_{1,2} = 0.5 \pm 0.5j$.
2. Dimensionner un observateur de Leuenberger L qui assure une convergence d'estimation la plus rapide possible.
3. Combien de périodes d'échantillonnage faut-il à l'observateur dimensionné précédemment pour annuler une erreur d'estimation ?
4. Compléter le pseudo-code (...) de la commande (avec régulateur et observateur) en vue d'une implémentation sur un microcontrôleur OU dessiner le schéma fonctionnel de cette commande complète.

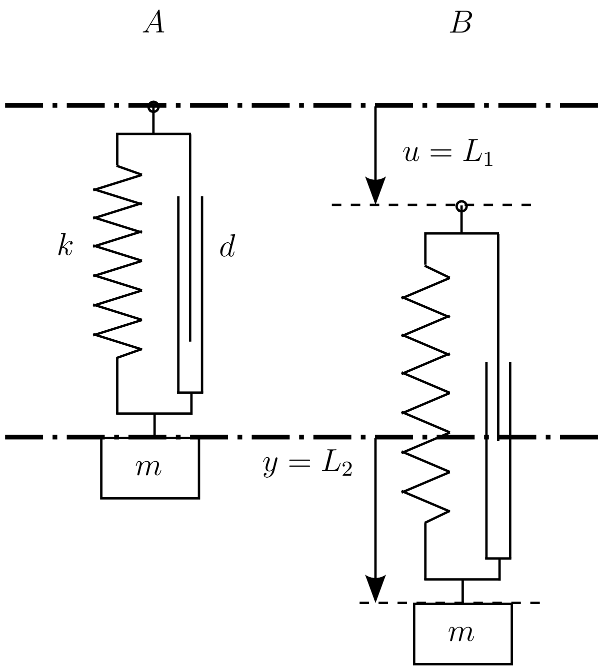
```
% début du programme pour contrôler le système

Phi   = [[2,1];[1,1]]
Gamma = [[1];[0]]
C     = [[1,0]]

K = ... % trouvé en 1.
L = ... % trouvé en 2.

début(boucle)
    y=lire_capteur_sortie
    x=charger_depuis_mémoire
    ...
    ...
    ...
    ...
    sauvegarder_dans_mémoire(x)
    appliquer_commande(u)
fin(boucle)

% fin du programme
```

Problème 2 : Modélisation d'état (0.5 pt)

On considère le système SISO de la figure ci-dessous. Il s'agit d'un ressort de rigidité k et d'un amortisseur de facteur d'amortissement d retenant une masse m. Le but est de contrôler la position L_2 (sortie) de la masse par rapport à un point d'équilibre avec le ressort chargé (A) en agissant sur la position de l'extrémité du ressort L_1 (entrée).
Ainsi en applicant la loi de Newton, il vient :

$$-kL - d\dot{L} = m\ddot{L}_2$$

avec $L = L_2 - L_1$



1. Ecrire le modèle d'état sous forme standard.

Problème 3 : Linéarisation (1.0 pt)

Soit le système MIMO non-linéaire discret suivant :

$$\begin{cases} y_1(k+1) & = y_2(k) + u_1^2(k) \\ \\ y_2(k+1) & = -\,y_1(k)u_2(k) \end{cases}$$

1. Ecrire les équations d'état du système non-linéaire en représentation d'état.
2. Linéariser le système autour du point de fonctionnement correspondant au couple d'entrée $(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (a, b)$ et donner la représentation matricielle.
3. Proposer et appliquer une approche alternative de linéarisation.
4. Discuter la validité du modèle d'origine de celui obtenu sous 2 et de celui obtenu sous 3.

Problème 4 : Discrétisation (1.0 pt)

Soit le système SIMO suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

1. Calculer la matrice Φ du modèle discrétisé avec une période d'échantillonnage h.
2. Calculer les valeurs propres du système discrétisé en boucle ouverte. Ce système est-il stable ?
3. Est-ce que le système discrétisé est observable ? Donner une justification analytique ainsi qu'une explication intuitive la confirmant.

Problème 5 : Découplage (1.5 pt)

Soit le système linéaire MIMO discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

On souhaite introduire un découpleur avec deux entrées $W_1(z)$ et $W_2(z)$ de manière à obtenir deux sous-systèmes SISO de fonction de transfert $R_1(z) = 3/(z-2)$ et $R_2(z) = 1/(z-1)$, où $R_i(z) = Y_i(z)/W_i(z), i = 1, 2$. Il est ensuite possible de déterminer une contre-réaction d'état K où les K_i peuvent être obtenus indépendamment pour chaque sous-système.

1. Trouver la matrice de découplage $\Delta(z)$, où $\Delta(z)$ vérifie l'équation $U(z) = \Delta(z)\, W(z)$.
2. Déterminer le gain de contre-réaction d'état K_1 de façon à obtenir une valeur propre du premier sous-système caractérisé par $R_1(z)$ en boucle fermé en $\lambda = 0.5$.
3. Déterminer K_2 sur la base d'une synthèse LQR (stationnaire) pour le deuxième sous-système caractérisé par $R_2(z)$ avec $Q_2 = 2Q_1$.
4. Le système qui a été découplé en 1 et dont la contre-réaction a été calculée en 2 et 3 peut maintenant être analysé en boucle fermée :
   (a) Ecrire explicitement les entrées artificielles $w_i(k)$ en fonction des sorties du système $y_i(k)$.
   (b) Ecrire explicitement les entrées réelles $u_i(k)$ en fonction des entrées artificielles $w_i(k)$.
   (c) Ecrire explicitement les entrées réelles $u_i(k)$ en fonction des sorties du système $y_i(k)$.