Démo 1 : *Simulation d'un pendule par intégration numérique*

1 Introduction

On considère le pendule présenté à la figure 2.1 du polycopié (avec les mêmes notations). L'équation dynamique est non linéaire (voir ci-dessous) et ne peut pas être résolue analytiquement. Il est par conséquent intéressant et utile d'illustrer les solutions numériques obtenues par le logiciel Matlab.

2 Equation dynamique

Le pendule simple est caractérisé par une masse m et une tige de longueur l. L'équation dynamique est :

$$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

avec des conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. La position d'équilibre est $\bar{\theta} = 0$ et $\bar{\omega} = 0$. Cette équation différentielle est non-linéaire à cause du terme $\sin\theta$. Si θ est petit (proche de la position d'équilibre), on peut utiliser l'approximation linéaire $\sin\theta \approx \theta$ pour résoudre le système de manière analytique. Par contre pour θ "grand", cette approximation est très mauvaise. Cela sera illustré par les résultats numériques.

3 Implémentation Matlab

Pour résoudre cette équation différentielle, Matlab utilise la méthode de "Runge-Kutta" à l'aide de la fonction *ode45*.

Pour implémenter *ode45*, nous avons besoin d'introduire le modèle d'état du sytème, c'est-à-dire un ensemble d'équations du premier ordre. Ce système a deux états : $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{cases}$$

Dans le programme qui vous est donné, on vous propose d'explorer les solutions correspondant à deux conditions initiales :

- la position horizontale, vitesse nulle : $x_1(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{x}_1(0) = 0$
- la position verticale vers le haut, vitesse nulle : $x_1(0) = \pi$, $\dot{x}_1(0) = 0$

Le programme affiche les courbes $x_1(t)$ et $\dot{x}_1(t)$ en fonction du temps pour une durée $t \in [0, 20]$ secondes.

4 Observation des résultats

Vous observez que l'allure des courbes $x_1(t)$ et $\dot{x}_1(t)$ est très différente pour les deux conditions initiales. Dans le cas de la condition initiale horizontale, l'allure de la solution est très proche d'une sinusoïde et par conséquent proche de la solution analytique obtenue en faisant l'approximation linéaire. Par contre, pour la condition initiale verticale vers le haut, l'approximation linéaire est très mauvaise et la solution numérique ne correspond pas du tout à une sinusoïde.

Une autre observation importante est la suivante. Dans le cas de la condition initiale verticale vers le haut, en théorie, la solution devrait être $x_1(t) = \pi$. En fait, c'est effectivement ce qu'on observe pour une dizaine de secondes. Mais en pratique, de minuscules erreurs numériques pendant l'intégration de Runge-Kutta suffisent à perturber l'équilibre instable du pendule.

Vous pouvez expérimenter d'autres conditions initiales par vous même, par exemple $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$, etc.