SÉRIE 5

Exercice 1

En appliquant le théorème de la valeur finale, on trouve:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)] = \lim_{s \to 0}\left[s\frac{10}{s-3}\right] = 0$$

En calculant la valeur finale dans le domaine temporel, on obtient:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s-3}\right]\right\} = \lim_{t \to \infty} 10e^{3t} = \infty$$

Nous constatons que les deux résultats sont différents et que le théorème de la valeur finale nous fournit une réponse erronée. Ceci est dû au fait que l'utilisation du théorème n'est pas possible dans notre exemple car la fonction $sF(s)$ contient un pôle ($s = 3$) qui se trouve dans la moitié droite du plan complexe.

Exercice 2

a) Modèle dynamique

- *Bilan massique*

$$\rho\frac{dV}{dt} = \rho q_1 - \rho k h \tag{1}$$

avec $dV(h) = S(h)dh$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = S(h)\frac{dh}{dt} = A\left(1 + \frac{h}{h_{max}}\right)\frac{dh}{dt} \tag{2}$$

et ainsi:

$$A\left(1 + \frac{h}{h_{max}}\right)\frac{dh}{dt} + kh = q_1 \tag{3}$$

- *Hypothèse*
  masse volumique $\rho = const$

b) Fonction de transfert $H(s)/Q_1(s)$

Le système dynamique est *non linéaire*. Il n'est donc pas possible de calculer une fonction de transfert sans procéder auparavant à une linéarisation autour du point d'équilibre: $\bar{q}_1 = 0{,}5 \ \mathrm{m^3/min}$ et $\bar{h} = 1m$.

- *Etat stationnaire* $(\bar{q}_1, \bar{h})$

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = 0$$

et *(3)* donne:

$$\bar{q}_1 = k\bar{h} \ \Rightarrow \ k = 0{,}5\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{min}}$$

- *Linéarisation*
  Le terme non linéaire $h(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)$ est linéarisé autour de $(\bar{h}, \mathrm{d}\bar{h}/\mathrm{d}t = 0)$ en considérant la partie linéaire d'un développement en série de Taylor:

  $$h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \approx \bar{h}\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}t}(h - \bar{h}) + \bar{h}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}t}\right) = \bar{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

  L'équation *(3)* devient ainsi:

  $$\bar{A}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + kh = q_1 \qquad \text{avec} \qquad \bar{A} = A\left(1 + \frac{\bar{h}}{h_{\mathrm{max}}}\right) \tag{4}$$

  Il s'agit d'un système dynamique linéaire du premier ordre.

- *Calcul de la fonction de transfert*
  En prenant la transformée de Laplace de *(4)*:

  $$\bar{A}sH(s) + kH(s) = Q_1(s)$$

  ce qui donne la fonction de transfert suivante:

  $$\frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{\bar{A}s + k} = \frac{1/k}{\frac{\bar{A}}{k}s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

  avec:

  $$K = \frac{1}{k} = 2\ \frac{\mathrm{min}}{\mathrm{m}^2}$$

  $$\tau = \frac{\bar{A}}{k} = \frac{A\left(1 + \frac{\bar{h}}{h_{\mathrm{max}}}\right)}{k} = 3\mathrm{min}$$

Exercice 3

Le système dynamique linéaire possède des conditions initiales non nulles. Le principe de superposition indique que la réponse sera la somme de la réponse indicielle pour des conditions initiales nulles et de la réponse libre.

- *Calcul de la réponse indicielle $c_1(t)$ pour des conditions initiales nulles*

$$\left|\begin{array}{l} s^2 C_1(s) + 7sC_1(s) + 6C_1(s) = U(s) \\ \dfrac{C_1(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^2+7s+6} \end{array}\right.$$

Pour $u(t) = \varepsilon(t)$, $U(s) = 1/s$ et par conséquent:

$$C_1(s) = \frac{1}{s^2+7s+6} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+6)}$$

En décomposant en éléments simples:

$$C_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+6}$$

Le calcul des coefficients A, B, C par la méthode des résidus donne:

$$\left|\begin{array}{l} A = \lim\limits_{s \to 0} \{sC_1(s)\} = \dfrac{1}{6} \\ B = \lim\limits_{s \to -1} \{(s+1)C_1(s)\} = -\dfrac{1}{5} \\ C = \lim\limits_{s \to -6} \{(s+6)C_1(s)\} = \dfrac{1}{30} \end{array}\right.$$

Finalement, on obtient la *réponse forcée* du système:

$$c_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[C_1(s)] = \frac{1}{6} - \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{30}e^{-6t} \qquad t \geq 0$$

- *Calcul de la réponse $c_2(t)$ due aux conditions initiales non nulles*

$$\mathcal{L}[\dot{c}_2(t)] = sC_2(s) - c_2(0) = sC_2(s) - 1$$

$$\mathcal{L}[\ddot{c}_2(t)] = s^2 C_2(s) - sc_2(0) - \dot{c}_2(0) = s^2 C_2(s) - s - 2$$

D'où:

$$[s^2 C_2(s) - s - 2] + 7[sC_2(s) - 1] + 6C_2(s) = 0$$

$$C_2(s) = \frac{s+9}{(s+1)(s+6)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+6}$$

Par la méthode des résidus on trouve:

$$A = \lim_{s \to -1} \{(s+1)C_2(s)\} = \frac{8}{5}$$

$$B = \lim_{s \to -6} \{(s+6)C_2(s)\} = -\frac{3}{5}$$

Finalement, on obtient la *réponse libre* du système:

$$c_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[C_2(s)] = \frac{8}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{-6t} \qquad t \geq 0$$

- *Réponse totale*

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) = \frac{1}{6} + \frac{7}{5}e^{-t} - \frac{17}{30}e^{-6t} \qquad t \geq 0$$

Remarque:

Dans la solution ci-dessus, on a choisi de calculer la réponse totale comme la somme de la réponse forcée et de la réponse libre. On aurait pu tout aussi bien calculer la réponse totale directement à partir de la transformée de Laplace de l'équation dynamique, en tenant compte des conditions initiales différentes de zéro et de l'entrée $u(t)$.