THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 14

20 décembre 2019

Groupes quotients

Exercice 1. Soient $H_1, \ldots, H_n$ des sous-groupes normaux d'un groupe G. On considère l'application

$$\phi \colon G \to G/H_1 \times \ldots G/H_n,\ g \mapsto (gH_1, \ldots, gH_n).$$

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi) = H_1 \cap \ldots \cap H_n$.

(b) Montrer que, si H_i est d'indice fini dans G, pour tout $1 \leq i \leq n$, et $([G : H_i], [G : H_j]) = 1$ pour tout $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$, alors ϕ est surjective et

$$[G : H_1 \cap \ldots \cap H_n] = \prod_{i=1}^{n} [G : H_i].$$

Groupes résolubles

Exercice 2. Soient G un groupe, $H < G$ un sous-groupe et $N < G$ un sous-groupe normal tels que H et N sont résolubles. Montrer que HN est résoluble.

Actions de groupes

Exercice 3. Soient G un groupe qui agit sur un ensemble X et H un sous-groupe de G. Montrer que H agit transitivement sur X si et seulement si G agit transitivement sur X et $G = HG_x$, où $x \in X$.

Exercice 4. Soit p un nombre premier.

(a) Soit G un p-groupe fini qui agit sur un ensemble fini X. Montrer que

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

En déduire que si p ne divise pas $|X|$, alors l'action de G sur X admet des points fixes.

(b) Utiliser le point (a) pour montrer le **Petit Théorème de Fermat**:

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Exercice 5. Soit $\phi \colon G \to G'$ un homomorphisme de groupes.

(a) Soient Y, Y' des G'-ensembles. Montrer que, si $v \colon Y \to Y'$ est une application G'-équivariante, alors $v \colon Y \to Y'$ est aussi G-équivariante, où Y et Y' sont des G-ensembles via l'action induite par ϕ, i.e. $g * y = \phi(g) \cdot y$ et $g * y' = \phi(g) \cdot y'$ respectivement, pour tout $g \in G$, $y \in Y$ et $y' \in Y'$. On note ${}^{\phi}v \colon {}^{\phi}Y \to {}^{\phi}Y'$ cette application G-équivariante.

(b) Soient X, X' des G-ensembles. Montrer qu'une application G-équivariante $u\colon X \to X'$ induit une application G'-équivariante

$$\overline{u} = G' \times_\phi u\colon G' \times_\phi X \to G' \times_\phi X',\ (g', x) \mapsto (g', u(x)).$$

Montrer également que:

(i) si $u = \mathrm{id}_X\colon X \to X$, alors $\overline{u} = \mathrm{id}_{G' \times_\phi X}$, et

(ii) si $u\colon X \to X'$ et $u'\colon X' \to X''$, alors $\overline{u' \circ u} = \overline{u} \circ \overline{u'}$.

(c) Définir

(i) pour tout G-ensemble X, une application G-équivariante $\eta_X\colon X \to {}^\phi(G' \times_\phi X)$, et

(ii) pour tout G'-ensemble Y, une application G'-équivariante $\epsilon_Y\colon (G' \times_\phi {}^\phi Y) \to Y$,

telles que les applications Φ et Ψ définie par

$$\Phi\colon \mathcal{F}_G(X, {}^\phi Y) \to \mathcal{F}_{G'}(G' \times_\phi X, Y),\ u \mapsto \epsilon_Y \circ \overline{u}$$

$$\Psi\colon \mathcal{F}_{G'}(G' \times_\phi X, Y) \to \mathcal{F}_G(X, {}^\phi Y),\ v \mapsto {}^\phi v \circ \eta_X$$

sont des inverses l'un de l'autre.

Remarque: Cette construction redonne la bijection $\mathcal{F}_G(X, {}^\phi Y) \cong \mathcal{F}_{G'}(G' \times_\phi X, Y)$ vue en cours.

p-Sous-groupes de Sylow

Exercice 6. Soient p un nombre premier, G un groupe fini tel que p divise $|G|$, $P < G$ un p-sous-groupe de Sylow et $H < G$ un sous-groupe tel que $N_G(P) < H$. Montrer que $N_G(H) = H$.

Exercice 7. Soient p, q deux premiers distincts et G un groupe d'ordre $|G| = p^2 q$.

(a) Montrer que G n'est pas simple.

(b) Montrer que, si $q < p$ et q ne divise pas $p^2 - 1$, alors G est abélien.

(c) En déduire que A_4 n'est pas simple et trouver tous les sous-groupes de Sylow de A_4.

Groupes libres

Exercice 8. Soit F un groupe libre de base X, où X est un ensemble.

(a) Pour $x \in X$, vérifier que l'application $s_x\colon F \to \mathbb{Z}$ qui envoie un mot réduit $w \in F$ sur la somme des exposants des termes x qui apparaissent dans w est un homomorphisme de groupes surjectif.

(b) Montrer que, si $w \in F$, alors $w \in [F, F]$ si et seulement si $s_x(w) = 0$ pour tout $x \in X$.

(c) Montrer que, si X est de rang fini $|X| = n > 2$, alors $F/[F, F] \cong \mathbb{Z}^n$.