THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 13

13 décembre 2019

Groupes libres

Exercice 1. Montrer qu'un groupe F est libre si et seulement si, pour tout homomorphisme surjectif $\phi\colon G \to H$ et tout homomorphisme $\psi\colon F \to H$, il existe un homomorphisme $\alpha\colon F \to G$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$.
Astuce: Utiliser (sans preuve) qu'un sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Exercice 2. Soient G un groupe et $N < G$ un sous-groupe normal tel que le quotient G/N est libre. Montrer qu'il existe un sous-groupe $H < G$ tel que $G = HN$ et $H \cap N = \{e\}$.
Astuce: Utiliser l'Exercice 1.

Exercice 3. Montrer que le centre d'un groupe libre de rang > 1 est trivial.

Exercice 4. Soit F un groupe libre. Montrer qu'il existe un automorphisme $\phi\colon F \to F$ tel que

(i) si $\phi(x) = x$, alors $x = e$, et

(ii) $\phi \circ \phi$ est l'identité sur F.

(Comparer avec l'Exercice 10 Série 1.)

Exercice 5.

(a) Montrer le **Lemme du Ping-Pong**:

Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Soient $g_1, \dots, g_k \in G$ d'ordre infini, pour $k \geq 2$. Supposons qu'il existe des sous-ensembles non-vides et disjoints $X_1, \dots, X_k$ de X tels que $g_i^n X_j \subseteq X_i$ pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ et tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors le sous-groupe $H = \langle g_1, \dots, g_k \rangle < G$ est libre avec base $\{g_1, \dots, g_k\}$.

Astuce: Montrer que tout mot réduit $w = g_{i_1}^{n_1} \cdots g_{i_r}^{n_r}$ n'est pas trivial en considérant son action sur un des X_i (bien choisir!). Commencer par le cas où $i_1 = i_r$.

(b) Utiliser le Lemme du Ping-Pong pour montrer que le sous-groupe $\langle A, B \rangle$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ est libre, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Présentations de groupes

Exercice 6. Trouver des présentations pour les groupes suivants:

(a) le groupe libre $\mathcal{F}(X)$ sur un ensemble X,

(b) le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$,

(c) le groupe symétrique S_3,

(d) le groupe symétrique S_4,

(e) le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^3$ de rang 3,

(f) le produit de groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$,

(g) le groupe des quaternions $\mathbf{Q}$ (voir Exercice 8 Série 3).

Exercice 7. On considère le groupe G de présentation

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = xyz \rangle.$$

(a) Montrer que G n'a pas de sous-groupe d'indice 2.

(b) Montrer que $xyz \in Z(G)$ et que $G/\langle xyz \rangle \cong A_4$.