THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 12

6 décembre 2019

Groupes abéliens libres

Exercice 1.

(a) Montrer que le produit de deux groupes abéliens libre est un groupe abélien libre.

(b) Soit B est un ensemble quelconque. On considère le sous-ensemble $\overline{\mathrm{Fun}}(B, \mathbb{Z}) \subset \mathrm{Fun}(B, \mathbb{Z})$ qui consiste en les fonctions $f\colon B \to \mathbb{Z}$ telle que l'ensemble $\{b \in B \mid f(b) \neq 0\}$ est fini. On munit $\overline{\mathrm{Fun}}(B, \mathbb{Z})$ d'une structure de groupe $+$ définie par $(f + g)(b) := f(b) + g(b)$ pour tous $f, g \in \overline{\mathrm{Fun}}(B, \mathbb{Z})$ et $b \in B$. Montrer que $\overline{\mathrm{Fun}}(B, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre.

Exercice 2 (A rendre pour le 13 décembre)**.** Soient F un groupe abélien libre de rang fini n et H un sous-groupe de F. Montrer que H est aussi un groupe abélien libre de rang $\leq n$.
Astuce: Par induction sur le rang du groupe abélien libre.

Exercice 3. Montrer que:

(a) le groupe $\mathbb{Q}$ muni de l'addition n'est pas un groupe abélien libre,

(b) le groupe $\mathbb{Q}_+^*$ des nombres rationnels positifs muni de la multiplication est un groupe abélien libre.

Exercice 4. Montrer qu'un groupe abélien F est libre si et seulement si, pour tout homomorphisme surjectif $\phi\colon G \to H$ entre deux groupes abéliens G et H et pour tout homomorphisme $\psi\colon F \to H$, il existe un homomorphisme $\alpha\colon F \to G$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$.
Astuce: Utiliser (sans preuve) qu'un sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre.

Exercice 5. Soient G un groupe abélien et $N < G$ un sous-groupe tel que le quotient G/N est (abélien) libre. Montrer qu'il existe un sous-groupe $H < G$ tel que $G = H + N$ et $H \cap N = 0$.
Astuce: Utiliser l'Exercice 4.