THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 12

6 décembre 2019

Groupes abéliens libres

Exercice 1.

(a) Montrer que le produit de deux groupes abéliens libre est un groupe abélien libre.

(b) Soit B est un ensemble quelconque. On considère le sous-ensemble $\overline{\mathrm{Fun}}(B,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Fun}(B,\mathbb{Z})$ qui consiste en les fonctions $f\colon B \to \mathbb{Z}$ telle que l'ensemble $\{b \in B \mid f(b) \neq 0\}$ est fini. On munit $\overline{\mathrm{Fun}}(B,\mathbb{Z})$ d'une structure de groupe $+$ définie par $(f+g)(b) := f(b) + g(b)$ pour tous $f, g \in \overline{\mathrm{Fun}}(B,\mathbb{Z})$ et $b \in B$. Montrer que $\overline{\mathrm{Fun}}(B,\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre.

Solution.

(a) Soient G, H deux groupes abéliens libres avec bases $\{g_i \mid i \in I\} \subset G$ et $\{h_j \mid j \in J\} \subset H$ respectivement, où I, J sont des ensembles. Alors

$$\{(g_i, 0_H) \mid i \in I\} \cup \{(0_G, h_j) \mid j \in J\} \subset G \times H$$

est une base de $G \times H$. En effet, si $(x,y) \in G \times H$, alors on a les écritures uniques

$$x = \sum_{n=1}^{N} k_n g_{i_n} \text{ et } y = \sum_{m=1}^{M} l_m h_{j_m}$$

pour des certains $i_1, \ldots, i_N \in I$, $j_1, \ldots, j_M \in J$ et $k_1, \ldots, k_N, l_1, \ldots, l_M \in \mathbb{Z}$. Ainsi on a l'écriture unique (à vérifier!)

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{N} k_n (g_{i_n}, 0_H) + \sum_{m=1}^{M} l_m (0_G, h_{j_m}).$$

(b) Soit $b \in B$. On définit $\chi_b\colon B \to \mathbb{Z}$ telle que $\chi_b(b) = 1$ et $\chi_b(x) = 0$ pour tout $x \neq b$. On montre que $\{\chi_b \mid b \in B\}$ est une base $\overline{\mathrm{Fun}}(B,\mathbb{Z})$. Si $f\colon B \to \mathbb{Z}$ est dans $\overline{\mathrm{Fun}}(B,\mathbb{Z})$, alors $\mathrm{Def}(f) = \{b \in B \mid f(b) \neq 0\}$ est fini et on a l'écriture unique (à vérifier!)

$$f(x) = \sum_{b \in \mathrm{Def}(f)} f(b)\chi_b(x).$$

Exercice 2 (A rendre pour le 13 décembre)**.** Soient F un groupe abélien libre de rang fini n et H un sous-groupe de F. Montrer que H est aussi un groupe abélien libre de rang $\leq n$.
Astuce: Par induction sur le rang du groupe abélien libre.

Solution. On fait la preuve par induction sur n. Si $n = 1$, alors $F \cong \mathbb{Z}$. Comme tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique, alors on a soit $H = 0$ soit $H \cong \mathbb{Z}$ et donc H est abélien libre de rang ≤ 1. Supposons $n > 1$. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de F. On pose $F' = \langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ et $H' = H \cap F'$. Par induction, H' est abélien libre de rang $\leq (n-1)$. De plus, par le deuxième théorème d'isomorphisme, on a que

$$H/H' = H/(H \cap F') \cong (H + F')/F' < F/F' \cong \mathbb{Z}.$$

Comme avant, on a soit $H/H' = 0$ soit $H/H' \cong \mathbb{Z}$. Dans le premier cas, on obtient que $H = H'$ et donc H est abélien libre de rang $\leq (n-1) < n$. Dans le deuxième cas, on montre que $H = H' \oplus \langle h \rangle$, pour un certain $h \in H$ tel que $\langle h \rangle \cong \mathbb{Z}$. Comme H/H' est abélien libre de rang 1, il existe $h \in H$ tel que $H/H' = \langle hH \rangle \cong \mathbb{Z}$. On en déduit directement que $\langle h \rangle \cong \mathbb{Z}$. De plus, si $x \in \langle h \rangle \cap H'$, alors $x = nh$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$ et $H' = xH' = nhH'$ puisque $x \in H'$. Donc $x = 0$ puisque $\langle hH \rangle \cong \mathbb{Z}$. Ainsi $\langle h \rangle \cap H' = 0$. Finalement, si $x \in H$, alors $xH' \in H/H' = \langle hH' \rangle$, d'où $xH' = nhH'$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Donc il existe $h' \in H'$ tel que $x = nh + h'$, ce qui montre que $H = H' + \langle h \rangle$. Donc on a bien $H = H' \oplus \langle h \rangle$. On conclut que H est abélien libre de rang $\leq (n-1) + 1 = n$.

Exercice 3. Montrer que:

(a) le groupe $\mathbb{Q}$ muni de l'addition n'est pas un groupe abélien libre,

(b) le groupe $\mathbb{Q}_+^*$ des nombres rationnels positifs muni de la multiplication est un groupe abélien libre.

Solution.

(a) Supposons par l'absurde que $\mathbb{Q}$ soit abélien libre avec base $\{a_i \mid i \in I\} \subset \mathbb{Q}$, où I est un ensemble quelconque. Soient a_i et a_j deux éléments distincts de cette base. Alors il existe $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $na_i + ma_j = 0$. Donc a_i et a_j ne sont pas linéairement indépendants. Donc si $\mathbb{Q}$ est abélien libre, il est engendré par un seul élément. Or on peut montrer facilement que, pour tout $a \in \mathbb{Q}$, alors $\langle a \rangle \subsetneq \mathbb{Q}$. Contradiction!

(b) Soit $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ premier}\}$. On montre que $\mathbb{Q}_+^*$ est abélien libre avec base P. En effet, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$, alors il existe $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s \in P$ et $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ tels que $a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ et $b = q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}$. Ainsi

$$\frac{a}{b} = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} q_1^{-m_1} \cdots q_s^{-m_s}$$

et $\mathbb{Q}_+^*$ est généré par P. Soient maintenant $p_1, \ldots, p_r \in P$ des nombres premiers distincts. Supposons que $p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} = 1$ pour certains $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$. Si tous les $n_i \geq 0$, alors clairement $n_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Supposons donc (sans perdre de généralité) que $n_1, \ldots, n_k \geq 0$ et $n_{k+1}, \ldots, n_r < 0$ pour un certain $1 \leq k < r$. Alors

$$p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} = p_{k+1}^{-n_{k+1}} \cdots p_r^{-n_r}.$$

Or, la décomposition en nombre premier dans $\mathbb{Z}$ est unique, donc c'est absurde. On conclut que P est une famille linéairement indépendante.

Exercice 4. Montrer qu'un groupe abélien F est libre si et seulement si, pour tout homomorphisme surjectif $\phi\colon G \to H$ entre deux groupes abéliens G et H et pour tout homomorphisme $\psi\colon F \to H$, il existe un homomorphisme $\alpha\colon F \to G$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$.
Astuce: Utiliser (sans preuve) qu'un sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre.

Solution. Supposons que F soit un groupe abélien libre et soit $\{x_i \mid i \in I\} \subset F$ une base de F. Soient G, H deux groupes abéliens, $\phi\colon G \to H$ un homomorphisme surjectif et $\psi\colon F \to H$ un homomorphisme. On construit un homomorphisme $\alpha\colon F \to G$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$. Soit $i \in I$. Comme ϕ est surjective, il existe $g_i \in G$ tel que $\phi(g_i) = \psi(x_i)$. On définit $\alpha\colon F \to G$ par

$\alpha(y) = \sum_{j=1}^{n} k_j g_{i_j}$, où $y = \sum_{j=1}^{n} k_j x_{i_j} \in F$ pour des certains $i_1, \ldots, i_n \in I$ et $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Alors $\alpha\colon F \to G$ est bien un homomorphisme de groupe, car l'écriture $y = \sum_{j=1}^{n} k_j x_{i_j}$ est unique pour tout $y \in F$. De plus, comme $\phi\colon G \to H$ et $\psi\colon F \to H$ sont des homomorphismes, pour $y = \sum_{j=1}^{n} k_j x_{i_j} \in F$, on a

$$\phi(\alpha(y)) = \phi(\sum_{j=1}^{n} k_j g_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} k_j \phi(g_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} k_j \psi(x_{i_j}) = \psi(\sum_{j=1}^{n} k_j x_{i_j}) = \psi(y).$$

Ainsi on a bien $\phi \circ \alpha = \psi$.

Supposons maintenant que F satisfait la condition que: pour tout homomorphisme surjectif $\phi\colon G \to H$ entre deux groupes abéliens G et H et pour tout homomorphisme $\psi\colon F \to H$, il existe un homomorphisme $\alpha\colon F \to G$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$. Par une proposition du cours, il existe un groupe abélien libre $F_{\mathrm{ab}}(F)$ et un homomorphisme surjectif $\phi\colon F_{\mathrm{ab}}(F) \to F$. On pose $\psi = \mathrm{id}_F\colon F \to F$. Par la propriété ci-dessus, il existe un homomorphisme $\alpha\colon F \to F_{\mathrm{ab}}(F)$ tel que $\phi \circ \alpha = \mathrm{id}_F$. On montre facilement que α est injective (puisque id_F l'est). Donc F est isomorphe à un sous-groupe du groupe abélien libre $F_{\mathrm{ab}}(F)$ et est donc lui-même abélien libre par l'Astuce.

Exercice 5. Soient G un groupe abélien et $N < G$ un sous-groupe tel que le quotient G/N est (abélien) libre. Montrer qu'il existe un sous-groupe $H < G$ tel que $G = H + N$ et $H \cap N = 0$. *Astuce: Utiliser l'Exercice 4.*

Solution. On applique l'Exercice 4 au groupe abélien libre $F = G/N$, à l'homomorphisme quotient $\phi = \pi\colon G \to G/N$ et à l'identité $\psi = \mathrm{id}_{G/N}\colon G/N \to G/N$. On trouve donc un homomorphisme $\alpha\colon G/N \to G$ tel que $\pi \circ \alpha = \mathrm{id}_{G/N}$. On pose $H = \mathrm{Im}(\alpha)$. Soient $g \in G$ et $h = \alpha(gN) \in H$. Alors

$$gN = \pi(\alpha(gN)) = \pi(h) = hN$$

et il existe $n \in N$ tel que $g = h + n$. Donc on a bien $G = H + N$. Finalement, soit $h \in H \cap N$. Comme $h \in H$, il existe $g \in G$ tel que $h = \alpha(gN)$. De plus, comme $h \in N$, alors

$$gN = \pi(\alpha(gN)) = \pi(h) = hN = N$$

et donc $g \in N$. Ainsi $h = \alpha(N) = 0$ puisque α est un homomorphisme. Cela montre que $H \cap N = 0$. En particulier, on obtient que $G = H \oplus N \cong G/N \oplus N$, car $H = \mathrm{Im}(\alpha) \cong G/N$ puisque α est injective.