THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 9

15 novembre 2019

Actions de groupe et lemme de Burnside

Exercice 1. Soit G un groupe fini qui agit transitivement sur un ensemble X, où $|X| \geq 2$. Montrer qu'il existe au moins un élément $g \in G$ tel que g n'admet aucun point fixe.

Exercice 2. Soit G un groupe fini. Montrer que le nombre de classes de conjugaison de G vaut

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C_G(g)|.$$

Vérifier la formule des classes pour le groupe symétrique S_3.

Exercice 3. Soit $\phi\colon G \to G'$ un homomorphisme de groupes.

(a) Montrer que ϕ induit une action de G sur G' via $g * g' = \phi(g)g'$ pour tous $g \in G$ et $g' \in G'$.

(b) Montrer que $\phi\colon G \to G'$ est une application G-équivariante, où G agit sur lui-même par multiplication à gauche et l'action de G sur G' est induite par ϕ comme défini en (a).

(c) Soit $g' \in G'$. Montrer que le groupe d'isotropie $G_{g'}$ est le noyau de ϕ.

(d) Montrer que l'action de G sur G' induite par ϕ est transitive si et seulement si ϕ est surjective.

(e) Supposons que G soit fini et soit H un sous-groupe de G. On considère l'homomorphisme $\phi\colon H \to G$ donné par l'inclusion de H dans G. Quelle est l'action de H sur G induite par ϕ? Calculer le nombre d'orbites de cette action.

Exercice 4. Soit k un corps. On considère l'application

$$\phi\colon S_n \to GL_n(k),\ \sigma \mapsto A_\sigma$$

où $A_\sigma \in GL_n(k)$ est la matrice $A_\sigma \in GL_n(k)$ associée à l'application linéaire $\lambda_\sigma\colon k^n \to k^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

(a) Montrer que ϕ est un homomorphisme de groupes et décrire l'action de S_n sur $GL_n(k)$ induite par ϕ.

(b) Si k est un corps fini d'ordre q, calculer le nombre d'orbites de l'action de S_n sur $GL_n(k)$ en fonction de q et de n. *(Astuce: Commencer par calculer le nombre d'éléments de $GL_n(k)$ en calculant le nombre de possibilités pour chaque ligne d'une matrice dans $GL_n(k)$).*

Exercice 5 (A rendre pour le 22 novembre)**.** Soit $\phi\colon G \to G'$ un homomorphisme de groupes. On a vu en cours que:

(i) si Y est un G'-ensemble, alors on peut définir un G-ensemble ${}^{\phi}Y$, où ${}^{\phi}Y$ est l'ensemble Y sur lequel G agit via $g * y = \phi(g) \cdot y$ pour tous $g \in G$ et $y \in Y$.

(ii) si X est un G-ensemble, alors on peut définir un G'-ensemble $G' \times_\phi X$, où $G' \times_\phi X$ est le quotient de $G' \times X$ par la relation d'équivalence $(g', g \cdot x) = (g'\phi(g), x)$ pour tous $g \in G$, $g' \in G'$ et $x \in X$, et G' agit sur cet ensemble par multiplication à gauche dans le premier facteur.

(iii) on a une bijection $\mathcal{F}_G(X, {}^\phi Y) \cong \mathcal{F}_{G'}(G' \times_\phi X, Y)$.

Calculer ces constructions dans le cas où

(a) $\phi\colon \{e\} \to G$ est l'inclusion de l'élément neutre e dans G,

(b) $\phi\colon G \to \{e\}$ est l'application qui envoie tout $g \in G$ sur e.

Cela vous rappelle-t-il quelque chose?

Exercice 6. Soient G un groupe et X, Y deux G-ensembles. Montrer que:

(a) si $f\colon X \to Y$ une application G-équivariante, alors $G_x \subset G_{f(x)}$ pour tout $x \in X$.

(b) si G agit transitivement sur Y, alors une application G-équivariante $f\colon X \to Y$ est surjective,

(c) si G agit transitivement sur X et si $x \in X$ et $y \in Y$, alors il existe une application G-équivariante $f\colon X \to Y$ telle que $f(x) = y$ si et seulement si $G_x \subset G_y$.

Exercice 7. On considère une grille de taille 3×3 comme dessinée ci-dessous. On colorie chaque carré de la grille en blanc ou en noir. Remarquez que les deux coloriages ci-dessous sont les mêmes, car en faisant une rotation de 90° du premier, on obtient le deuxième (où N représente la couleur 'noir' et B la couleur 'blanc').

1	2	3
4	5	6
7	8	9

N	N	B
B	B	B
B	B	N

B	B	N
B	B	N
N	B	B

Calculer le nombre de coloriages possibles.
Astuce: Considérer l'action du groupe cyclique $G = \langle R \rangle$ sur la grille, où R est la rotation de $90°$.