THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 8

8 novembre 2019

Action de groupes

Exercice 1. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Soit Y un ensemble quelconque. Montrer qu'on a une bijection

$$\mathcal{F}(X,Y) \cong \mathcal{F}_G(X, \prod_{g\in G} Y),$$

où G agit sur $\prod_{g\in G} Y$ en permutant les facteurs.
Astuce: Si $f\colon X \to Y$ est une application d'ensembles, considérer l'application

$$X \to \prod_{g\in G} Y, \ \ x \mapsto \Big(f(g^{-1}\cdot x)\Big)_{g\in G}.$$

Exercice 2. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Soit Y un ensemble quelconque.

(a) Montrer qu'on a une bijection

$$\mathcal{F}(X_G, Y) \cong \mathcal{F}_G(X, \mathrm{Triv}_G(Y)).$$

(b) Montrer qu'on a une bijection

$$\mathcal{F}(Y, X^G) \cong \mathcal{F}_G(\mathrm{Triv}_G(Y), X).$$

Exercice 3 (A rendre pour le 15 novembre)**.** Soit G un groupe.

(a) Soient H_1, H_2 des sous-groupes de G. Montrer que H_1 et H_2 sont conjugués si et seulement s'il existe une bijection G-équivariante $G/H_1 \to G/H_2$.

(b) Soit H un sous-groupe de G. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}_G(G/H) \cong N_G(H)/H$, où $\mathrm{Aut}_G(G/H)$ est le groupe des automorphismes G-équivariants de G/H.

Exercice 4. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

(i) Pour Y un G-ensemble, la restriction de l'action de G sur Y à H donne une action de H sur Y.

(ii) Pour X un H-ensemble, le G-ensemble $G \times_H X$ est l'ensemble $G \times X$ quotienté par la relation d'équivalence $(gh, x) \sim (g, h\cdot x)$ pour tous $g \in G$, $h \in H$ et $x \in X$, où G agit sur $G \times_H X$ par multiplication à gauche dans la première variable.

Montrer que

$$\mathcal{F}_G(G \times_H X, Y) \cong \mathcal{F}_H(X, Y).$$

Exercice 5. Soit H un sous-groupe de S_n qui agit transitivement sur $\{1, \dots, n\}$. Montrer que:

(a) si $H_1 = \{h \in H \mid h\cdot 1 = 1\}$, alors $[H : H_1] = n$,

(b) si H est abélien, alors $|H| = n$.