THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 11

29 novembre 2019

p-groupes

Exercice 1 (Théorème de Cauchy)**.** Soit p un nombre premier et soit G un groupe tel que p divise $|G|$. Montrer qu'il existe un élément dans G d'ordre p.

Exercice 2 (A rendre pour le 6 décembre)**.** Soit G un p-groupe d'ordre p^n, pour $n \geq 1$. Montrer que:

(a) G a un sous-groupe normal d'ordre p^k, pour tout $0 \leq k \leq n$,

(b) G est résoluble.

p-sous-groupes de Sylow

Exercice 3. Soient $p > q$ deux nombres premiers et soit G un groupe d'ordre pq. Montrer que:

(a) le groupe G a un sous-groupe normal d'ordre p. *(Astuce: utiliser l'Exercice 4 (e) Série 5.)*

(b) si q ne divise pas $p-1$, alors G est cyclique. *(Astuce: se rappeler l'Exercice 8 (c) Série 4 et l'Exercice 6 Série 10.)*

(c) si q divise $p-1$, alors soit G est cyclique, soit $G = \langle a, b \rangle$ avec a un élément d'ordre p et b un élément d'ordre q tels que $bab^{-1} = a^m$, où $m^q \equiv 1 (\text{mod } p)$ mais $m \not\equiv 1 (\text{mod } p)$.

Exercice 4. Montrer que tous les groupes d'ordre 15, 33, 35 et 51 sont cycliques.

Exercice 5. Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 6 et tous les groupes d'ordre 10.

Exercice 6. On considère $SL_2(\mathbb{F}_3)$, le groupe spécial de degré 2 sur le corps $\mathbb{F}_3 (\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que $|SL_2(\mathbb{F}_3)| = 24$.

(b) Calculer le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_3)$.

(c) En déduire le nombre de 2-sous-groupes de Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_3)$.