THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 10

22 novembre 2019

p-Groupes

Exercice 1. Soit p un nombre premier. Montrer qu'un groupe fini G est un p-groupe si et seulement si $|G| = p^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (A rendre pour le 29 novembre)**.** Soient p un nombre premier et G un groupe fini. Montrer que:

(a) si $G \neq \{e\}$ est un p-groupe, alors $Z(G) \neq \{e\}$.

(b) si G n'est pas abélien, alors $G/Z(G)$ n'est pas cyclique.

(c) si $|G| = p^2$, alors G est abélien.

p-Sous-groupes de Sylow

Exercice 3. Soient p un nombre premier et G un groupe fini qui admet au moins un p-sous-groupe de Sylow. Montrer que:

(a) le nombre de p-sous-groupes de Sylow de G divise $|G|$.

(b) le groupe G admet un unique p-sous-groupe de Sylow P si et seulement si P est normal dans G.

Exercice 4. On dit qu'un groupe $G \neq \{e\}$ est **simple** s'il n'admet aucun sous-groupe normal autre que $\{e\}$ et G. Montrer que:

(a) il n'existe aucun groupe simple d'ordre 30.

(b) il n'existe aucun groupe simple d'ordre 36.

(c) tout groupe d'ordre 40 admet un sous-groupe normal.

(d) tout groupe d'ordre 42 admet un sous-groupe normal.

Exercice 5. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes normaux de G tels que $H \cap K = \{e\}$ et $G = HK$. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $H \times K \cong G$.
Astuce: se rappeler de l'Exercice 7 (e) Série 3.

Exercice 6. Soient $p \neq q$ deux nombres premiers et G un groupe fini d'ordre $p^n q^m$, où $n, m \in \mathbb{N}$. Supposons que G a un unique p-sous-groupe de Sylow P et un unique q-sous-groupe de Sylow Q. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $G \cong P \times Q$.

(Plus généralement, on peut montrer que si G a un unique p-sous-groupe de Sylow pour chaque premier p qui divise G, alors G est isomorphe au produit de ses sous-groupes de Sylow.)