THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 9

15 novembre 2019

Actions de groupe et lemme de Burnside

Exercice 1. Soit G un groupe fini qui agit transitivement sur un ensemble X, où $|X| \geq 2$. Montrer qu'il existe au moins un élément $g \in G$ tel que g n'admet aucun point fixe.

Solution. Supposons par l'absurde que tous les éléments de G admettent au moins un point fixe, i.e. $|X^g| \geq 1$ pour tous $g \in G$. Comme X n'a qu'une seule orbite, par le lemme de Burnside,

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{|X|}{|G|} + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G \setminus \{e\}} |X^g| \geq \frac{2}{|G|} + \frac{|G|-1}{|G|} > 1.$$

Contradiction! Donc il existe $g \in G$ tel que $X^g = \varnothing$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini. Montrer que le nombre de classes de conjugaison de G vaut

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C_G(g)|.$$

Vérifier la formule des classes pour le groupe symétrique S_3.

Solution. On considère l'action de G sur G par conjugaison. Alors, pour $x \in G$, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est la classe de conjugaison de x. Par la formule de Burnside, le nombre de classe de conjugaison de G vaut

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |G^g|.$$

Or l'ensemble des points fixes G^g est égal à

$$G^g = \{x \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{x \in G \mid xgx^{-1} = g\} = C_G(g),$$

donc on obtient bien la formule demandée.

Dans S_3, on pose $\sigma = (1\ 2)$ et $\rho = (1\ 2\ 3)$. Alors $S_3 = \langle \sigma, \rho \rangle = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \rho, \rho^2\}$ où $\rho\sigma = \sigma\rho^2$. On calcule

$$\frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in S_3} |C_{S_3}(g)| = \frac{1}{6}\Big(|C_{S_3}(\mathrm{id})| + |C_{S_3}(\sigma)| + |C_{S_3}(\sigma\rho)| + |C_{S_3}(\sigma\rho^2)| + |C_{S_3}(\rho)| + |C_{S_3}(\rho^2)|\Big).$$

Puisque σ et ρ ne commutent pas, on calcule que

$$\begin{array}{lll} |C_{S_3}(\mathrm{id})| = |S_3| = 6 & |C_{S_3}(\sigma)| = |\langle \sigma \rangle| = 2 & |C_{S_3}(\sigma\rho)| = |\langle \sigma\rho \rangle| = 2 \\ |C_{S_3}(\sigma\rho^2)| = |\langle \sigma\rho^2 \rangle| = 2 & |C_{S_3}(\rho)| = |\langle \rho \rangle| = 3 & |C_{S_3}(\rho^2)| = |\langle \rho^2 \rangle| = 3. \end{array}$$

Ainsi il y a $\frac{1}{6}(6+2+2+2+3+3) = \frac{18}{6} = 3$ classes de conjugaison. C'est bien le nombre de classes de conjugaison de S_3, car, par l'Exercice 7 (a) Série 6, les 3 classes de conjugaison de S_3 sont $\{\mathrm{id}\}$, $\{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$ et $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

Exercice 3. Soit $\phi\colon G \to G'$ un homomorphisme de groupes.

(a) Montrer que ϕ induit une action de G sur G' via $g * g' = \phi(g)g'$ pour tous $g \in G$ et $g' \in G'$.

(b) Montrer que $\phi\colon G \to G'$ est une application G-équivariante, où G agit sur lui-même par multiplication à gauche et l'action de G sur G' est induite par ϕ comme défini en (a).

(c) Soit $g' \in G'$. Montrer que le groupe d'isotropie $G_{g'}$ est le noyau de ϕ.

(d) Montrer que l'action de G sur G' induite par ϕ est transitive si et seulement si ϕ est surjective.

(e) Supposons que G soit fini et soit H un sous-groupe de G. On considère l'homomorphisme $\phi\colon H \to G$ donné par l'inclusion de H dans G. Quelle est l'action de H sur G induite par ϕ? Calculer le nombre d'orbites de cette action.

Solution.

(a) Soient $g, h \in G$ et $g' \in G'$. Alors $(gh)*g' = \phi(gh)g' = \phi(g)\phi(h)g' = g*(\phi(h)g') = g*(h*g')$. De plus, $e * g' = \phi(e)g' = e'g' = g'$, où e est l'élément neutre de G et e' est l'élément neutre de G'. Cela définit donc bien une action de groupe de G sur G'.

(b) Soit $g, x \in G$. Alors $\phi(gx) = \phi(g)\phi(x) = g * \phi(x)$. Donc ϕ est bien G-équivariante.

(c) On calcule

$$G_{g'} = \{g \in G \mid g * g' = g'\} = \{g \in G \mid \phi(g)g' = g'\} = \{g \in G \mid \phi(g) = e'\} = \mathrm{Ker}(\phi).$$

(d) Supposons que l'action de G sur G' soit transitive. Soit $g' \in G'$. Alors $g' \in \mathcal{O}_{e'}$ et il existe $g \in G$ tel que $g' = g * e' = \phi(g)e' = \phi(g)$. Donc ϕ est surjective. Supposons maintenant que ϕ soit surjective. Alors, pour $g', h' \in G'$, il existe $g \in G$ tel que $\phi(g) = h'(g')^{-1}$. D'où $g * g' = \phi(g)g' = h'$. L'action de G sur G' est donc transitive.

(e) L'action de H sur G induite par ϕ est l'action donnée par la multiplication à gauche du sous-groupe H sur G. Soient $h \in H$ et $g \in G$. Alors $h \cdot g = g$ si et seulement si $h = e$. Donc on a $G^e = G$ et $G^h = \varnothing$ pour tout $h \in H, h \neq e$. Par le lemme de Burnside, le nombre d'orbites de cette action est

$$\frac{1}{|H|}\sum_{h \in H} |G^h| = \frac{|G^e|}{|H|} = \frac{|G|}{|H|} = [G : H].$$

Exercice 4. Soit k un corps. On considère l'application

$$\phi\colon S_n \to GL_n(k),\ \sigma \mapsto A_\sigma$$

où $A_\sigma \in GL_n(k)$ est la matrice $A_\sigma \in GL_n(k)$ associée à l'application linéaire $\lambda_\sigma\colon k^n \to k^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

(a) Montrer que ϕ est un homomorphisme de groupes et décrire l'action de S_n sur $GL_n(k)$ induite par ϕ.

(b) Si k est un corps fini d'ordre q, calculer le nombre d'orbites de l'action de S_n sur $GL_n(k)$ en fonction de q et de n. *(Astuce: Commencer par calculer le nombre d'éléments de $GL_n(k)$ en calculant le nombre de possibilités pour chaque ligne d'une matrice dans $GL_n(k)$).*

Solution.

(a) Soient $\sigma, \tau \in S_n$. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$, on a

$$\lambda_\sigma(\lambda_\tau(x_1, \ldots, x_n)) = \lambda_\sigma(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = (x_{\sigma\tau(1)}, \ldots, x_{\sigma\tau(n)}) = \lambda_{\sigma\tau}(x_1, \ldots, x_n).$$

Donc $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\tau}$ et ϕ est bien un homomorphisme de groupes. L'action de S_n sur $GL_n(k)$ induite par ϕ est telle qu'un élément $\sigma \in S_n$ permute les lignes d'un matrice $M \in GL_n(k)$, i.e. $(\sigma \cdot M)_{i,j} = M_{\sigma(i),j}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

(b) On calcule déjà le nombre d'élément de $GL_n(k)$. On rappelle que si une matrice est inversible, alors toutes ses lignes sont linéairement indépendantes. On compte le nombre de possibilités qu'on a pour chaque ligne d'une matrice dans $GL_n(k)$. Pour la première ligne, on peut choisir n'importe quel vecteur de k^n, excepté le vecteur nul. Donc on a $q^n - 1$ possibilités. Pour la deuxième ligne, on peut choisir n'importe quel vecteur de k^n, excepté les q vecteurs qui sont multiples scalaires de la première ligne. Il y a donc $q^n - q$ possibilités. Pour la troisième ligne, on peut choisir n'importe quel vecteur de k^n, excepté les q^2 vecteurs qui sont combinaisons linéaires des deux premières lignes. Il y a donc $q^n - q^2$ possibilités. En continuant ce raisonnement, on trouve

$$|GL_n(k)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

Soit $\sigma \in S_n$ et $M \in GL_n(k)$. Alors $\sigma * M = M$ si et seulement si toutes les lignes qui sont permutées par σ sont les mêmes. Or, une matrice qui a deux lignes pareilles n'est pas inversible. Donc id est le seul élément de S_n qui admet des points fixes. Par le lemme de Burnside, on a que le nombre d'orbites de l'action de S_n sur $GL_n(k)$ vaut

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} |GL_n(k)^\sigma| = \frac{1}{n!} |GL_n(k)^{\mathrm{id}}| = \frac{1}{n!} |GL_n(k)| = \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

Exercice 5 (A rendre pour le 22 novembre)**.** Soit $\phi \colon G \to G'$ un homomorphisme de groupes. On a vu en cours que:

(i) si Y est un G'-ensemble, alors on peut définir un G-ensemble ${}^\phi Y$, où ${}^\phi Y$ est l'ensemble Y sur lequel G agit via $g * y = \phi(g) \cdot y$ pour tous $g \in G$ et $y \in Y$.

(ii) si X est un G-ensemble, alors on peut définir un G'-ensemble $G' \times_\phi X$, où $G' \times_\phi X$ est le quotient de $G' \times X$ par la relation d'équivalence $(g', g \cdot x) = (g'\phi(g), x)$ pour tous $g \in G$, $g' \in G'$ et $x \in X$, et G' agit sur cet ensemble par multiplication à gauche dans le premier facteur.

(iii) on a une bijection $\mathcal{F}_G(X, {}^\phi Y) \cong \mathcal{F}_{G'}(G' \times_\phi X, Y)$.

Calculer ces constructions dans le cas où

(a) $\phi \colon \{e\} \to G$ est l'inclusion de l'élément neutre e dans G,

(b) $\phi \colon G \to \{e\}$ est l'application qui envoie tout $g \in G$ sur e.

Cela vous rappelle-t-il quelque chose?

Solution. Remarquez tout d'abord qu'un ensemble muni d'une action du groupe $\{e\}$ est juste un ensemble, vu que l'élément neutre agit trivialement sur tous les éléments. On identifie donc un $\{e\}$-ensemble X avec l'ensemble X lui-même.

(a) On considère l'homomorphisme $\phi\colon \{e\} \to G$. Soit Y un G-ensemble. Alors ${}^{\phi}Y$ est juste l'ensemble Y, où on a oublié la G-action. Soit maintenant X un ensemble. Alors le G-ensemble $G \times_{\phi} X$ est juste l'ensemble $G \times X$. On trouve donc la bijection

$$\mathcal{F}(X, Y) \cong \mathcal{F}_G(G \times X, Y)$$

que l'on a déjà vue en cours.

(b) On considère l'homomorphisme $\phi\colon G \to \{e\}$. Soit Y un ensemble. Alors le G-ensemble ${}^{\phi}Y$ est muni de la G-action $g * y = \phi(g) \cdot y = e \cdot y = y$ pour tous $g \in G$ et $y \in Y$. Donc l'action de G sur ${}^{\phi}Y$ est triviale et ${}^{\phi}Y = \mathrm{Triv}_G(Y)$. Soit maintenant X un G-ensemble. Alors l'ensemble $\{e\} \times_{\phi} X$ est l'ensemble $\{e\} \times X \cong X$ quotienté par la relation d'équivalence $(e, x) = (e\phi(g), x) \sim (e, g \cdot x)$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$. Autrement dit, c'est l'ensemble X quotienté par la relation d'équivalence $x \sim g \cdot x$, i.e. c'est l'ensemble X_G des orbites de X. On trouve la bijection

$$\mathcal{F}_G(X, \mathrm{Triv}_G(Y)) \cong \mathcal{F}(X_G, Y)$$

de l'Exercice 2 Série 8.

Exercice 6. Soient G un groupe et X, Y deux G-ensembles. Montrer que:

(a) si $f\colon X \to Y$ une application G-équivariante, alors $G_x \subset G_{f(x)}$ pour tout $x \in X$.

(b) si G agit transitivement sur Y, alors une application G-équivariante $f\colon X \to Y$ est surjective,

(c) si G agit transitivement sur X et si $x \in X$ et $y \in Y$, alors il existe une application G-équivariante $f\colon X \to Y$ telle que $f(x) = y$ si et seulement si $G_x \subset G_y$.

Solution.

(a) Soit $x \in X$ et $g \in G_x$. Alors $g \cdot f(x) = f(g \cdot x) = f(x)$. Donc $g \in G_{f(x)}$.

(b) Soit $x \in X$ et $y \in Y$. Comme G agit transitivement sur Y, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot f(x) = y$. Ainsi $f(g \cdot x) = g \cdot f(x) = y$ et f est surjective.

(c) Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Si on a une application G-équivariante $f\colon X \to Y$ telle que $f(x) = y$, alors $G_x \subset G_{f(x)} = G_y$ par le point (a). Supposons maintenant qu'on ait $G_x \subset G_y$. Comme G agit transitivement sur X, on a que $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\} = X$. On définit $f\colon X \to Y$ par $f(g \cdot x) = g \cdot y$ pour tout $g \cdot x \in \mathcal{O}_x = X$. Alors f est bien définie. En effet, si $g, g' \in G$ sont tels que $g \cdot x = g' \cdot x$, alors $x = g^{-1}g' \cdot x$ et $g^{-1}g' \in G_x \subset G_y$. Ainsi $y = g^{-1}g' \cdot y$ ou de manière équivalente $g \cdot y = g' \cdot y$, i.e. $f(g \cdot x) = f(g' \cdot x)$. De plus, f est clairement G-équivariante.

Exercice 7. On considère une grille de taille 3×3 comme dessinée ci-dessous. On colorie chaque carré de la grille en blanc ou en noir. Remarquez que les deux coloriages ci-dessous sont les mêmes, car en faisant une rotation de 90° du premier, on obtient le deuxième (où N représente la couleur 'noir' et B la couleur 'blanc').

1	2	3
4	5	6
7	8	9

N	N	B
B	B	B
B	B	N

B	B	N
B	B	N
N	B	B

Calculer le nombre de coloriages possibles.
Astuce: Considérer l'action du groupe cyclique $G = \langle R \rangle$ sur la grille, où R est la rotation de $90°$.

Solution. On note X l'ensemble de toutes les grilles 3×3 où chaque case est coloriée soit en blanc soit en noir (donc $|X| = 2^9$). On considère l'action du groupe cyclique $G = \langle R \rangle$ d'ordre 4 sur X, où R est la rotation de $90°$. Puisque deux coloriages sont les mêmes si l'on obtient l'un comme une rotation de l'autre, alors le nombre de coloriages est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur X. Par le lemme de Burnside, ce nombre vaut

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{4}(|X^{\mathrm{id}}| + |X^R| + |X^{R^2}| + |X^{R^3}|).$$

Tout d'abord, l'identité fixe tous les coloriages, et donc $|X^{\mathrm{id}}| = |X| = 2^9$. Ensuite, la rotation R de $90°$ appliquée à la grille de gauche, donne la grille de droite.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

7	4	1
8	5	2
9	6	3

Donc les points fixes de R sont tels que la couleur des cases 1, 3, 7 et 9 est identique et la couleur des cases 2, 4, 6 et 8 est identique. Donc on a $|X^R| = 2^3$. De même pour la rotation R^3 de $-90°$, d'où $|X^{R^3}| = 2^3$. Finalement, la rotation R^2 de $180°$ appliquée à la grille de gauche, donne la grille de droite.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

9	8	7
6	5	4
3	2	1

Donc les points fixes de R^2 sont tels que les couleurs des cases 1 et 9; 2 et 8; 3 et 7; 4 et 6 sont respectivement identiques. Donc on a $|X^{R^2}| = 2^5$. Ainsi le nombre de coloriages possibles est

$$\frac{1}{4}(2^9 + 2^3 + 2^5 + 2^3) = 140.$$