THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 8

8 novembre 2019

Action de groupes

Exercice 1. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Soit Y un ensemble quelconque. Montrer qu'on a une bijection
$$\mathcal{F}(X,Y) \cong \mathcal{F}_G(X, \prod_{g\in G} Y),$$
où G agit sur $\prod_{g\in G} Y$ en permutant les facteurs.
Astuce: Si $f\colon X \to Y$ est une application d'ensembles, considérer l'application
$$X \to \prod_{g\in G} Y,\ \ x \mapsto \Big(f(g^{-1}\cdot x)\Big)_{g\in G}.$$

Solution. On définit une application $\alpha\colon \mathcal{F}(X,Y) \to \mathcal{F}_G(X, \prod_{g\in G} Y)$. Soit $f\colon X \to Y$ une application. On pose $\alpha(f)\colon X \to \prod_{g\in G} Y$ telle que $\alpha(f)(x) = (f(g^{-1}\cdot x))_{g\in G}$, pour $x \in X$, où G agit sur $\prod_{g\in G} Y$ en permutant les facteurs. Alors $\alpha(f)$ est G-équivariante, car pour tout $h \in G$ et tout $x \in X$,
$$\begin{aligned}\alpha(f)(h\cdot x) = \Big(f(g^{-1}\cdot(h\cdot x))\Big)_{g\in G} &\overset{k^{-1}=g^{-1}h}{=} \Big(f(k^{-1}\cdot x)\Big)_{hk\in G}\\ = h\cdot\Big(f(k^{-1}\cdot x)\Big)_{k\in G} &= h\cdot\alpha(f)(x).\end{aligned}$$

On définit l'application inverse $\beta\colon \mathcal{F}_G(X, \prod_{g\in G} Y) \to \mathcal{F}(X,Y)$. Soit $f\colon X \to \prod_{g\in G} Y$ une application G-équivariante. On pose $\beta(f)\colon X \to Y$ telle que $\beta(f)(x) = \pi_e(f(x))$, pour $x \in X$, où $\pi_e\colon \prod_{g\in G} Y \to Y$ est la projection sur la composante donnée par l'élément neutre $e \in G$. On vérifie facilement que $\beta\circ\alpha = \mathrm{id}$. On montre encore que $\alpha\circ\beta = \mathrm{id}$. Soit $f\colon X \to \prod_{g\in G} Y$ une application G-équivariante. On note $f_g = \pi_g \circ f$, où $\pi_g\colon \prod_{g\in G} Y \to Y$ est la projection sur la composante correspondante à $g \in G$. Alors, pour $g \in G$ et $x \in X$,
$$f_e(g^{-1}\cdot x) = \pi_e(f(g^{-1}\cdot x)) = \pi_e(g^{-1}\cdot f(x)) = \pi_e(\Big(f_k(x)\Big)_{g^{-1}k\in G}) = f_g(x).$$

Ainsi, pour $x \in X$,
$$\alpha(\beta(f))(x) = \Big(\beta(f)(g^{-1}\cdot x)\Big)_{g\in G} = \Big(f_e(g^{-1}\cdot x)\Big)_{g\in G} = \Big(f_g(x)\Big)_{g\in G} = f(x).$$

Donc on a bien $\alpha\circ\beta = \mathrm{id}$ et on obtient la bijection désirée.

Exercice 2. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Soit Y un ensemble quelconque.

(a) Montrer qu'on a une bijection
$$\mathcal{F}(X_G, Y) \cong \mathcal{F}_G(X, \mathrm{Triv}_G(Y)).$$

(b) Montrer qu'on a une bijection
$$\mathcal{F}(Y, X^G) \cong \mathcal{F}_G(\mathrm{Triv}_G(Y), X).$$

Solution.

(a) On définit une application $\alpha\colon \mathcal{F}(X_G, Y) \to \mathcal{F}_G(X, \mathrm{Triv}_G(Y))$. Soit $f\colon X_G \to Y$ une application de l'ensemble des orbites $X_G = \{[x] \mid x \in X\}$ vers Y. On pose $\alpha(f)\colon X \to Y$ telle que $\alpha(f)(x) = f([x])$, pour $x \in X$, où G agit sur Y trivialement. Alors $\alpha(f)$ est G-équivariante, car pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$,

$$\alpha(f)(g \cdot x) = f([g \cdot x]) = f([x]) = \alpha(f)(x) = g \cdot \alpha(f)(x).$$

On définit l'application inverse $\beta\colon \mathcal{F}_G(X, \mathrm{Triv}_G(Y)) \to \mathcal{F}(X_G, Y)$. Soit $f\colon X \to Y$ une application G-équivariante, où G agit trivialement sur Y. On pose $\beta(f)\colon X_G \to Y$ telle que $\beta(f)([x]) = f(x)$, pour $x \in X$. Alors $\beta(f)$ est bien définie, car si $[x] = [x'] \in X_G$, il existe $g \in G$ tel que $x = g \cdot x'$ et

$$\beta(f)([x]) = f(x) = f(g \cdot x') = g \cdot f(x') = f(x') = \beta(f)([x']).$$

On vérifie facilement que $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ et $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ et on obtient la bijection désirée.

(b) On définit une application $\alpha\colon \mathcal{F}(Y, X^G) \to \mathcal{F}_G(\mathrm{Triv}_G(Y), X)$. Soit $f\colon Y \to X^G$ une application de Y vers l'ensemble des points fixes X^G. On pose $\alpha(f)\colon Y \to X$ telle que $\alpha(f)(y) = f(y)$, pour $y \in Y$, où G agit sur Y trivialement. Alors $\alpha(f)$ est G-équivariante, car pour tout $g \in G$ et tout $y \in Y$, puisque $f(y) \in X^G$, on a

$$\alpha(f)(g \cdot y) = \alpha(f)(y) = f(y) = g \cdot f(y) = g \cdot \alpha(f)(y).$$

On définit l'application inverse $\beta\colon \mathcal{F}_G(\mathrm{Triv}_G(Y), X) \to \mathcal{F}(Y, X^G)$. Soit $f\colon X \to Y$ une application G-équivariante, où G agit trivialement sur Y. On pose $\beta(f)\colon Y \to X^G$ telle que $\beta(f)(y) = f(y)$. Alors $\beta(f)$ est bien définie, car $g \cdot f(y) = f(g \cdot y) = f(y)$ pour tout $g \in G$ et tout $y \in Y$, i.e. $f(y) \in X^G$. On vérifie facilement que $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ et $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ et on obtient la bijection désirée.

Exercice 3 (A rendre pour le 15 novembre)**.** Soit G un groupe.

(a) Soient H_1, H_2 des sous-groupes de G. Montrer que H_1 et H_2 sont conjugués si et seulement s'il existe une bijection G-équivariante $G/H_1 \to G/H_2$.

(b) Soit H un sous-groupe de G. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}_G(G/H) \cong N_G(H)/H$, où $\mathrm{Aut}_G(G/H)$ est le groupe des automorphismes G-équivariants de G/H.

Solution.

(a) Supposons que H_1 et H_2 soient conjugués entre eux. Il existe $g \in G$ tel que $gH_1g^{-1} = H_2$. On définit $f\colon G/H_1 \to G/H_2$ par $f(xH_1) = xg^{-1}H_2$ pour tout $x \in G$. Alors f est bien définie, car si $xH_1 = yH_1$, il existe $h \in H_1$ tel que $x = yh$ et

$$f(xH_1) = xg^{-1}H_2 = yhg^{-1}H_2 = yg^{-1}ghg^{-1}H_2 = yg^{-1}H_2 = f(yH_1)$$

puisque $ghg^{-1} \in gH_1g^{-1} = H_2$. De plus, f est clairement G-équivariante et surjective. Il reste à montrer l'injectivité. Soit $x, y \in G$ tel que $f(xH_1) = f(yH_1)$. Alors $xg^{-1}H_2 = yg^{-1}H_2$ et donc il existe $h \in H_2$ tel que $xg^{-1} = yg^{-1}h$. Autrement dit, $x = yg^{-1}hg$ avec $g^{-1}hg \in g^{-1}H_2g = H_1$ et ainsi $xH_1 = yH_1$. Donc f définit bien un isomorphisme G-équivariant $G/H_1 \to G/H_2$.

Supposons maintenant que $f\colon G/H_1 \to G/H_2$ soit un isomorphisme G-équivariant. Soit $g \in G$ tel que $f(H_1) = g^{-1}H_2$. Comme f est G-équivariante, on a que $f(xH_1) = xg^{-1}H_2$ pour tout $x \in G$. On montre que $gH_1g^{-1} = H_2$. Soit $h \in H_1$. Alors, comme f est bien définie, $f(hH_1) = f(H_1)$ et donc $hg^{-1}H_2 = g^{-1}H_2$. Ainsi $ghg^{-1} \in H_2$, d'où $gH_1g^{-1} \subset H_2$. Soit maintenant $h \in H_2$. Alors

$$f(hgH_1) = hgg^{-1}H_2 = hH_2 = H_2 = gg^{-1}H_2 = f(gH_1).$$

Par injectivité de f, on a $hgH_1 = gH_1$ et donc $g^{-1}hg \in H_1$. Ainsi $g^{-1}H_2g \subset H_1$ ou de manière équivalente $H_2 \subset gH_1g^{-1}$. Ainsi H_1 et H_2 sont bien conjugués dans G.

(b) On définit $\phi\colon N_G(H) \to \mathrm{Aut}_G(G/H)$ par $\phi(g)\colon G/H \to G/H$, $xH \mapsto xg^{-1}H$, pour tout $g \in N_G(H)$. Par la première partie de (a), pour tout $g \in N_G(H)$, $\phi(g)$ est bien un automorphisme G-équivariant, puisque $gHg^{-1} = H$. Par la deuxième partie de (a), si $f\colon G/H \to G/H$ est un automorphisme G-équivariant, alors $f(xH) = xg^{-1}H$ pour un certain $g \in G$ tel que $gHg^{-1} = H$, i.e. $g \in N_G(H)$. En particulier, $f = \phi(g)$ et ϕ est surjective. On montre que ϕ est un homomorphisme de groupes. Soit $g, k \in N_G(H)$. Alors

$$\phi(gk)(xH) = x(gk)^{-1}H = xk^{-1}g^{-1}H = \phi(g)(xk^{-1}H) = \phi(g)(\phi(k)(xH)),$$

pour tout $x \in G$, d'où $\phi(gk) = \phi(g) \circ \phi(k)$. Finalement, $\mathrm{Ker}(\phi) = H \subset N_G(H)$. En effet, si $h \in H$, alors $\phi(h)(xH) = xh^{-1}H = xH$ pour tout $x \in G$, donc $\phi(h) = \mathrm{id}_{G/H}$ et $h \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Si $g \in \mathrm{Ker}(\phi)$, alors $H = \mathrm{id}_{G/H}(H) = \phi(g)(H) = g^{-1}H$ et ainsi $g \in H$. On conclut par le premier théorème d'isomorphisme que $N_G(H)/H \cong \mathrm{Aut}_G(G/H)$.

Exercice 4. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

(i) Pour Y un G-ensemble, la restriction de l'action de G sur Y à H donne une action de H sur Y.

(ii) Pour X un H-ensemble, le G-ensemble $G \times_H X$ est l'ensemble $G \times X$ quotienté par la relation d'équivalence $(gh, x) \sim (g, h \cdot x)$ pour tous $g \in G$, $h \in H$ et $x \in X$, où G agit sur $G \times_H X$ par multiplication à gauche dans la première variable.

Montrer que

$$\mathcal{F}_G(G \times_H X, Y) \cong \mathcal{F}_H(X, Y).$$

Solution. On définit une application $\alpha\colon \mathcal{F}_G(G \times_H X, Y) \to \mathcal{F}_H(X, Y)$. Soit $f\colon G \times_H X \to Y$ une application G-équivariante, où G agit sur $G \times_H X$ par multiplication à gauche sur le premier facteur. On pose $\alpha(f)\colon X \to Y$ telle que $\alpha(f)(x) = f(e, x)$, pour $x \in X$. Alors $\alpha(f)$ est H-équivariante, car pour tout $h \in H$ et tout $x \in X$,

$$\alpha(f)(h \cdot x) = f(e, h \cdot x) = f(h, x) = h \cdot f(e, x) = h \cdot \alpha(f)(x).$$

On définit l'application inverse $\beta\colon \mathcal{F}_H(X, Y) \to \mathcal{F}_G(G \times_H X, Y)$. Soit $f\colon X \to Y$ une application H-équivariante. On pose $\beta(f)\colon G \times_H X \to Y$ telle que $\beta(f)(g, x) = g \cdot f(x)$, pour $g \in G$ et $x \in X$. Alors $\beta(f)$ est bien définie, car, pour tous $h \in H$, $g \in G$ et $x \in X$, on a

$$\beta(f)(gh, x) = gh \cdot f(x) = g \cdot f(h \cdot x) = \beta(f)(g, h \cdot x).$$

De plus, $\beta(f)$ est clairement G-équivariante. On vérifie facilement que $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ et $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ et on obtient la bijection désirée.

Exercice 5. Soit H un sous-groupe de S_n qui agit transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que:

(a) si $H_1 = \{h \in H \mid h \cdot 1 = 1\}$, alors $[H : H_1] = n$,

(b) si H est abélien, alors $|H| = n$.

Solution.

(a) On a que H_1 est le groupe d'isotropie de 1. Ainsi $[H : H_1] = |\mathcal{O}_1| = n$, car H agit transitivement sur $\{1, \ldots, n\}$, i.e. on a une seule orbite qui contient tous les éléments et en particulier $\mathcal{O}_1 = \{1, \ldots, n\}$.

(b) Supposons que H soit abélien. Soit $x \in H_1$. Alors, pour tout $h \in H$, on a

$$x \cdot (h \cdot 1) = xh \cdot 1 = hx \cdot 1 = h \cdot (x \cdot 1) = h \cdot 1.$$

Comme $\{h \cdot 1 \mid h \in H\} = \mathcal{O}_1 = \{1, \ldots, n\}$, alors x fixe tous les éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Donc $x = \mathrm{id}$ puisque id est le seul élément de S_n qui fixe tous les éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Ainsi $|H_1| = 1$ et $|H| = [H : H_1] \cdot |H_1| = n$, par (a).