THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 7

1^er novembre 2019

Actions de groupes

Exercice 1. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Montrer que, si $x, y \in X$ et $g \in G$ sont tels que $g \cdot x = y$, alors les groupes d'isotrope G_x et G_y sont conjugués dans G. Que se passe-t-il si G_x est un sous-groupe normal de G, pour un certain $x \in X$?

Solution. On montre que $G_y = gG_xg^{-1}$. On calcule

$$\begin{aligned} gG_xg^{-1} = g\{h \mid h \cdot x = x\}g^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \cdot x = x\} &\overset{x=g^{-1}\cdot y}{=} \{ghg^{-1} \mid hg^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot y\} \\ = \{ghg^{-1} \mid ghg^{-1} \cdot y = gg^{-1} \cdot y = y\} &= \{h' \mid h' \cdot y = y\} = G_y. \end{aligned}$$

Soit $x \in X$ tel que $G_x < G$ est un sous-groupe normal. Alors G_x est égal à tous ses conjugués par définition. Donc tous les éléments dans l'orbite de x ont le même groupe d'isotropie.

Exercice 2. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X et soit $H < G$ un sous-groupe normal. On note $X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x, \ \forall h \in H\}$ l'ensemble des H-points fixes de X. Montrer que l'action de G sur X induit une action de G/H sur X^H.

Solution. On définit une action de G/H sur X^H

$$(G/H) \times X^H \to X^H, \ (gH, x) \mapsto g \cdot x.$$

Cette application est bien définie:

- Pour $g \in G$, $x \in X^H$ et $h \in H$, on a $h \cdot (g \cdot x) = gg^{-1}h \cdot (g \cdot x) = g \cdot (g^{-1}hg \cdot x) = g \cdot x$, car $g^{-1}hg \in H$ puisque H est normal dans G. Donc $g \cdot x \in X^H$.
- Pour $g, g' \in G$ tels que $gH = g'H$, il existe $h \in H$ tel que $g = g'h$. Pour $x \in X^H$, on a $gH \cdot x = g \cdot x = g'h \cdot x = g' \cdot (h \cdot x) = g' \cdot x = g'H \cdot x$. Donc l'action de gH ne dépend pas du choix de g.

Elle définit bien une action de G/H sur X^H:

- Pour $x \in X^H$, on a $H \cdot x = e \cdot x = x$.
- Pour $g, g' \in G$ et $x \in X^H$, on a $gH \cdot (g'H \cdot x) = gH \cdot (g' \cdot x) = g \cdot (g' \cdot x) = gg' \cdot x = gg'H \cdot x$.

Exercice 3 (A rendre pour le 8 novembre)**.** Soient k un corps et $k[x_1, \ldots, x_n]$ l'ensemble des polynômes de n variables à coefficients dans k.

(a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} &S_n \times k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n], \\ &(\sigma, g(x_1, \ldots, x_n)) \mapsto g^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

est une action de groupe.

(b) Soit

$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

Calculer le groupe d'isotropie $(S_n)_{\Delta_n}$ et l'orbite $\mathcal{O}_{\Delta_n}$ du polynômme $\Delta_n(x_1, \ldots, x_n)$. Vérifier que $|\mathcal{O}_{\Delta_n}| = [S_n : (S_n)_{\Delta_n}]$.

Solution.

(a) Soit $g(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ et soient $\sigma, \tau \in S_n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{id} \cdot g(x_1, \ldots, x_n) &= g^{\mathrm{id}}(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n); \\ \sigma \cdot (\tau \cdot g(x_1, \ldots, x_n)) &= \sigma \cdot g^{\tau}(x_1, \ldots, x_n) = \sigma \cdot g(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = g^{\sigma}(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) \\ &= g(x_{\sigma\tau(1)}, \ldots, x_{\sigma\tau(n)}) = g^{\sigma\tau}(x_1, \ldots, x_n) = (\sigma\tau) \cdot g(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Donc $(\sigma, g) \mapsto g^{\sigma}$ définit bien une action de S_n sur $k[x_1, \ldots, x_n]$.

(b) Soit $\sigma \in S_n$. Alors

$$\sigma \cdot \Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \Delta_n^{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \Delta_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}).$$

Comme σ est une bijection, chaque terme $x_i - x_j$, pour tous $1 \le i < j \le n$, apparaît une fois dans le produit Δ_n^{σ} à signe près. Il est facile de voir qu'une transposition $\tau \in S_n$ est telle que $\tau \cdot \Delta_n = -\Delta_n$ (Faire les calculs!). Comme toute permutation de S_n s'écrit comme un produit de transpositions, on obtient alors que $\sigma \cdot \Delta_n = \epsilon(\sigma)\Delta_n$, pour tout $\sigma \in S_n$, où $\epsilon(\sigma)$ est le signe de σ. Ainsi le groupe d'isotropie de Δ_n est

$$(S_n)_{\Delta_n} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \cdot \Delta_n = \Delta_n\} = \{\sigma \in S_n \mid \epsilon(\sigma) = 1\} = A_n.$$

De plus, l'orbite de Δ_n est $\mathcal{O}_{\Delta_n} = \{\sigma \cdot \Delta_n \mid \sigma \in S_n\} = \{\pm\Delta_n\}$. Donc on a bien

$$2 = |\mathcal{O}_{\Delta_n}| = [S_n : (S_n)_{\Delta_n}] = [S_n : A_n].$$

Exercice 4. Soit G un groupe. On considère l'action par conjugaison de G sur lui-même.

(a) Calculer le noyau de l'action

$$\gamma \colon G \to \mathrm{Aut}(G), \ g \mapsto \gamma_g$$

où $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$ pour tout $g, x \in G$. Qu'en déduit-on par le premier théorème d'isomorphisme?

(b) On note $\mathrm{Int}(G)$ l'image de γ. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

(c) Calculer $\mathrm{Aut}(S_3)$ et $\mathrm{Int}(S_3)$.

(d) Soit $\mathbf{Q}$ le groupe des quaternions (défini à l'Exercice 8, Série 3). Calculer $\mathrm{Int}(\mathbf{Q})$.

Solution.

(a) On montre que $\mathrm{Ker}(\gamma) = Z(G)$. Soit $g \in Z(G)$. Alors $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$ pour tout $x \in G$. D'où $\gamma_g = \mathrm{id}_G$ et $g \in \mathrm{Ker}(\gamma)$. Inversément, soit $g \in \mathrm{Ker}(\gamma)$. Alors $\gamma_g = \mathrm{id}_G$. Donc, pour tout $x \in X$, $gxg^{-1} = x$, i.e. $gx = xg$. Ainsi $g \in Z(G)$. Cela montre que $\mathrm{Ker}(\gamma) = Z(G)$. Par le premier théorème d'isomorphisme, on obtient que $G/Z(G) \cong \mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Int}(G)$.

(b) Comme $\mathrm{Int}(G)$ est l'image de l'homomorphisme γ, c'est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$. Il reste à vérifier qu'il est normal. Soit $\gamma_g \in \mathrm{Int}(G)$ avec $g \in G$ et $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. On calcule $\phi\gamma_g\phi^{-1}$. Soit $x \in G$. On a

$$\phi\gamma_g\phi^{-1}(x) = \phi(g\phi^{-1}(x)g^{-1}) = \phi(g)\phi(\phi^{-1}(x))\phi(g)^{-1} = \phi(g)x\phi(g)^{-1} = \gamma_{\phi(g)}(x).$$

Donc $\phi\gamma_g\phi^{-1} = \gamma_{\phi(g)} \in \mathrm{Int}(G)$ et $\mathrm{Int}(G)$ est bien normal dans $\mathrm{Aut}(G)$.

(c) Comme $Z(S_3) = \{\mathrm{id}\}$, alors $\mathrm{Int}(S_3) \cong S_3/Z(S_3) = S_3$.

On rappelle que $S_3 = \langle \sigma, \rho \rangle$, où $\sigma = (1\ 2)$ et $\rho = (1\ 2\ 3)$. Donc l'image d'un homorphisme $f\colon S_3 \to S_3$ est entièrement déterminée par $f(\sigma)$ et $f(\rho)$. Comme un automorphisme préserve l'ordre des éléments, un automorphisme $f\colon S_3 \to S_3$ est tel que $f(\sigma)$ est un élément d'ordre 2 et $f(\rho)$ est un élément d'ordre 3. Donc on a au plus 3 choix pour $f(\sigma)$ et au plus 2 choix pour $f(\rho)$. Ainsi il y au plus $2 \cdot 3 = 6$ automorphismes de S_3. On obtient $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathrm{Int}(S_3) \cong S_3$.

(d) On rappelle que le groupe des quaternions est le groupe $\mathbf{Q} = \{\pm 1, \pm a, \pm b, \pm ab\}$ d'ordre 8 tel que $a^2 = b^2 = -1$ et $ab = -ba$. Comme a, b et ab ne commutent pas, $Z(\mathbf{Q}) = \{\pm 1\}$. Donc $\mathrm{Int}(\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}/\{\pm 1\}$. Dans le quotient $\mathbf{Q}/\{\pm 1\}$, les éléments a, b et ab sont d'ordre 2. En effet, $a^2\{\pm 1\} = (-1)\{\pm 1\} = \{\pm 1\}$, etc. On obtient que

$$\mathrm{Int}(\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Exercice 5. Soient G un groupe et X, Y deux G-ensembles. On considère l'ensemble $F(X, Y)$ des applications $f\colon X \to Y$. On définit une action

$$G \times F(X,Y) \to F(X,Y),\ (g, f) \mapsto g * f$$

où $(g * f)(x) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x)$ pour tous $g \in G, f \in F(X,Y)$ et $x \in X$.

(a) Montrer que cela définit bien une action du groupe G sur $F(X, Y)$.

(b) Une application $f\colon X \to Y$ est appelée **G-équivariante** si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$. Montrer que l'ensemble des points fixes $F(X,Y)^G$ est l'ensemble de toutes les applications G-équivariantes de X vers Y.

(c) On pose $X = Y = \mathbb{R}$ et on considère l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $1 \cdot x = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Qu'est-ce qu'une application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-équivariante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Solution.

(a) Soit $f \in F(X, Y)$. Il est clair que $e * f = f$. Soit $g, h \in G$. On a

$$\begin{aligned} g * (h * f)(x) &= g \cdot (h * f)(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (h \cdot f(h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x))) = gh \cdot f(h^{-1}g^{-1} \cdot x) \\ &= gh \cdot f((gh)^{-1} \cdot x) = (gh * f)(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in X$ et donc $g * (h * f) = gh * f$. On a donc bien une action de G sur $F(X, Y)$.

(b) Soit $f \in F(X,Y)^G$. Alors, pour tout $g \in G$, $g * f = f$. Soit $g \in G$ et $x \in X$. On a

$$f(x) = (g * f)(x) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x) \iff g^{-1} \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Donc f est bien G-équivariante. Supposons maintenant que $f \in F(X, Y)$ soit G-équivariante. Alors, pour $g \in G$ et $x \in X$, on a

$$(g * f)(x) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot f(x)) = gg^{-1} \cdot f(x) = f(x).$$

Donc $g * f = f$ et $f \in F(X,Y)^G$.

(c) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-équivariante. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x) = -f(x)$. C'est donc une application impaire.

Transitivité

Définition. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. L'action de G sur X est **transitive** si elle n'admet qu'une seule orbite, i.e. pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.

Exercice 6. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Montrer que G agit transitivement sur chacune des orbites de X.

Solution. Soit $x \in X$ et soit $\mathcal{O}_x$ son orbite. On montre que G agit transitivement sur $\mathcal{O}_x$. Soit $y, z \in \mathcal{O}_x$. Alors il existe $g, h \in G$ tels que $y = g \cdot x$ et $z = h \cdot x$. Donc on a $z = h \cdot x = hg^{-1}g \cdot x = hg^{-1} \cdot (g \cdot x) = hg^{-1} \cdot y$. Cela montre que G agit transitivement sur $\mathcal{O}_x$.

Exercice 7. Soient G un groupe et $\alpha\colon G \to \mathrm{Perm}(X)$ une action de G sur un ensemble X. On note $g \cdot x = \alpha(g)(x)$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$. Soit $K = \mathrm{Ker}(\alpha)$.

(a) Montrer que K est l'intersection de tous les groupes d'isotropie G_x avec $x \in X$.

(b) Montrer que G/K agit sur X par l'action $gK \cdot x = g \cdot x$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$.

(c) Montrer que si l'action de G sur X est transitive, alors l'action de G/K sur X est aussi transitive.

(d) Montrer que si G agit transitivement sur X, alors $|K| \leq \frac{|G|}{|X|}$.

Solution.

(a) Soit $g \in K = \mathrm{Ker}(\alpha)$. Alors $\alpha(g) = \mathrm{id}_X$ et donc, pour tout $x \in X$, on a $g \cdot x = x$. Ainsi $g \in G_x$ pour tout $x \in X$. Cela montre que $K \subset \bigcap_{x \in X} G_x$. Inversément, soit $g \in \bigcap_{x \in X} G_x$. Alors $g \cdot x = x$ pour tout $x \in X$. Donc $\alpha(g) = \mathrm{id}_X$ et $g \in K$. Donc on a bien $K = \bigcap_{x \in X} G_x$.

(b) L'action de G/K sur X est bien définie, car si $g, g' \in G$ sont tels que $gK = g'K$, alors il existe $k \in K$ tel que $g = g'k$ et donc

$$gK \cdot x = g \cdot x = g'k \cdot x = g' \cdot (k \cdot x) = g' \cdot x = g'K \cdot x,$$

pour tout $x \in X$. De plus, c'est bien une action de groupe, car $K \cdot x = e \cdot x = x$ et $gK \cdot (g'K \cdot x) = gK \cdot (g' \cdot x) = g \cdot (g' \cdot x) = gg' \cdot x = gg'K \cdot x$.

(c) Supposons que G agit transitivement sur X, i.e. pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. On montre que G/K agit aussi transitivement sur X. Soient $x, y \in X$ et soit $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. Alors $y = g \cdot x = gK \cdot x$. Donc l'action de G/K sur X est aussi transitive.

(d) Comme G agit transitivement sur X, on a une seule orbite $\mathcal{O}_x = X$ pour tout $x \in X$. Soit $x \in X$ quelconque. Par une proposition du cours, on a $|X| = |\mathcal{O}_x| = [G : G_x]$. Comme K est l'intersection de tous les groupes d'isotropies, alors on a $K \subset G_x$ et, en particulier, $|K| \leq |G_x|$. Ainsi

$$|X| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|} \geq \frac{|G|}{|K|} \iff |K| \leq \frac{|G|}{|X|}.$$