THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 6

25 octobre 2019

Groupe dérivé et centre d'un groupe

Exercice 1. Soit G un groupe. Soit $[G,G]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. On appelle $[G,G]$ le **groupe dérivé** de G. Montrer que:

(a) le groupe dérivé $[G,G]$ est un sous-groupe normal de G et son quotient $G_{\text{ab}} = G/[G,G]$ est abélien,

(b) si N est un sous-groupe de G tel que $[G,G] \subset N$, alors N est normal et G/N est abélien.

(c) En déduire que $[G,G]$ est le plus petit sous-groupe normal de G pour lequel le groupe quotient est abélien. *(Utiliser aussi l'Exercice 1 (a) Série 5).*

Solution.

(a) Soient $g, x, y \in G$. Alors

$$g[x,y]g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}].$$

Cela montre que $[G,G]$ est normal dans G. De plus, comme $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} \in [G,G]$, alors $xyx^{-1}y^{-1}[G,G] = [G,G]$ dans G_{ab}. Ainsi

$$x[G,G] \cdot y[G,G] = xy[G,G] = yx[G,G] = y[G,G] \cdot x[G,G],$$

ce qui montre que G_{ab} est abélien.

(b) Soit $N < G$ tel que $[G,G] < N$. Soit $n \in N$ et $g \in G$. Alors

$$gng^{-1} = gng^{-1}n^{-1}n = [g,n]n \in N$$

puisque $[g,n] \in [G,G] \subset N$, $n \in N$ et N est stable par multiplication. Cela montre que N est normal dans G. Soient $x, y \in G$. Alors

$$xN \cdot yN = xyN = yxx^{-1}y^{-1}xyN = yx[x^{-1}, y^{-1}]N = yxN$$

puisque $[x^{-1}, y^{-1}] \in N$. Donc G/N est abélien.

(c) Par l'Exercice 1 (a) Série 5, si $H < G$ est un sous-groupe normal tel que G/H est abélien, alors $[G,G] \subset H$. Ainsi, en utilisant (c), on obtient qu'un sous-groupe normal $H < G$ est tel que G/H est abélien si et seulement si $[G,G] \subset H$. Donc $[G,G]$ est bien le plus petit sous-groupe normal de G pour lequel le groupe quotient est abélien.

Exercice 2. Calculer le groupe dérivé et l'abélianisé du groupe symétrique S_n, pour $n \geq 1$.

Solution. Comme S_1 et S_2 sont abéliens, leur groupe dérivé est trivial. Supposons donc $n \geq 3$. On montre que $[S_n, S_n] = A_n$. Soient $\sigma, \tau \in S_n$. On calcule le signe de $[\sigma, \tau]$:

$$\epsilon([\sigma,\tau]) = \epsilon(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\epsilon(\sigma)^{-1}\epsilon(\tau)^{-1} = \epsilon(\sigma)^2\epsilon(\tau)^2 = 1.$$

Donc $[S_n, S_n] \subset A_n$. Pour montrer que $A_n \subset [S_n, S_n]$, on montre que A_n est engendré par les 3-cycles et que chaque 3-cycle est un commutateur. Tout élément de A_n est un produit d'un nombre pair de transpositions et tout 3-cycle est un produit de deux transpositions (on a $(i\ j\ k) = (i\ k)(i\ j)$ pour tous $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts). On montre que tout produit de deux transpositions peut s'écrire comme un produit de 3-cycles. Si $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ sont distincts, alors $(i\ k)(i\ j) = (i\ j\ k)$. Si $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ sont distincts, alors $(i\ j)(k\ l) = (i\ k\ l)(i\ j\ l)$. Ainsi tout élément de A_n s'écrit comme un produit de 3-cycles et A_n est le sous-groupe engendré par les 3-cycles. Soient $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts. On a que

$$(i\ j\ k) = (i\ k\ j)^2 = ((i\ j)(i\ k))^2 = (i\ j)(i\ k)(i\ j)(i\ k) = [(i\ j), (i\ k)].$$

Donc tout 3-cycle est un commutateur. En particulier, le sous-groupe engendré par les 3-cycles, i.e. A_n, est aussi contenu dans le sous-groupe engendré par les commutateurs. Cela montre que $A_n \subset [S_n, S_n]$. Donc $A_n = [S_n, S_n]$ et l'abélianisé $(S_n)_{\text{ab}} = S_n/A_n$ est isomorphe à $\{-1, 1\}$, par le premier théorème d'isomorphisme appliqué au signe $\epsilon\colon S_n \to \{-1, 1\}$.

Exercice 3. Soit G un groupe. On note $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ pour tout } x \in G\}$ le **centre** de G. Montrer que:

(a) $Z(G)$ est un sous-groupe normal de G et $Z(G)$ est abélien,

(b) si un sous-groupe $A < G$ est tel que $A \subset Z(G)$, alors A est normal dans G et abélien,

(c) un sous-groupe $A < G$ qui est abélien n'est pas forcément contenu dans le centre $Z(G)$.

(d) Montrer que G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$.

Solution.

(a) Soient $g, x \in G$ et $z \in Z(G)$. Alors $xgzg^{-1} = xzgg^{-1} = xz = zx = gg^{-1}zx = gzg^{-1}x$, donc $gzg^{-1} \in Z(G)$ et $Z(G)$ est normal dans G. Clairement, $Z(G)$ est abélien.

(b) Soit $A < G$ tel que $A \subset Z(G)$. Alors A est normal dans G, vu que, pour tout $a \in A$ et $g \in G$, on a $gag^{-1} = agg^{-1} = a \in A$ puisque $a \in Z(G)$. Clairement, A est abélien vu que tout sous-groupe d'un groupe abélien est lui-même abélien.

(c) On considère le groupe symétrique S_3 et on écrit $\rho = (1\ 2\ 3)$. Alors $\langle \rho \rangle$ est un sous-groupe normal et abélien de G, puisqu'il est cyclique d'indice 2. Par l'Exercice 6 (b) Série 5, on sait que $Z(S_3) = \{\text{id}\}$. Donc $\langle \rho \rangle$ n'est pas contenu dans $Z(S_3)$.

(d) On a que G est abélien si et seulement si tout élément de G commute avec tous les éléments de G si et seulement si $Z(G) = G$.

Exercice 4. Soit G un groupe.

(a) Montrer que $[G, G] = \{e\}$ si et seulement si $Z(G) = G$.

(b) Trouver un exemple d'un groupe G tel que $Z(G) = \{e\}$, mais $[G, G] \neq G$.

(c) Trouver un exemple d'un groupe G tel que $[G, G] = G$, mais $Z(G) \neq \{e\}$.

Solution.

(a) On a que $[G, G] = \{e\}$ si et seulement si, pour tous $x, y \in G$, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = e$ si et seulement si, pour tous $x, y \in G$, $xy = yx$ si et seulement si G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$ (Exercice 3 (d)).

(b) On considère le groupe symétrique S_3. Alors $[S_3, S_3] = A_3 \neq S_3$ par l'Exercice 2 et $Z(S_3) = \{\mathrm{id}\}$ par l'Exercice 6 (b) Série 5.

(c) On considère le groupe $SL_2(\mathbb{R})$. Comme les seuls matrices qui commutent avec toutes les matrices sont les matrices scalaires, on a que $Z(SL_2(\mathbb{R})) = \{I, -I\}$ où I est la matrice identité. Pour montrer que $[SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{R})] = SL_2(\mathbb{R})$, on montre que $SL_2(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices élémentaires de la forme

$$E_{12}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{21}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

pour $x, y \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Alors $ad - bc = 1$. En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A afin d'obtenir l'identité, on trouve que:

Cas 1: si $c \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Cas 2: si $c = 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b+d-1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $SL_2(\mathbb{R})$ est bien généré par les matrices élémentaires $E_{12}(x)$ et $E_{21}(y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Il suffit de voir que $E_{12}(x)$ et $E_{21}(y)$ sont des commutateurs dans $SL_2(\mathbb{R})$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, pour obtenir le résultat. Si on pose

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4y}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

alors $E_{12}(x) = [B, C]$ et $E_{21}(y) = [B, D]$. Donc on a bien $[SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{R})] = SL_2(\mathbb{R})$.

Groupes résolubles

Exercice 5 (A rendre pour le 1er novembre)**.** Soit G un groupe résoluble. Montrer que:

(a) si H est un sous-groupe de G, alors H est résoluble,

(b) si N est un sous-groupe normal de G, alors G/N est résoluble.

(c) En déduire (par une proposition du cours) le résultat suivant: Soient G un groupe et N un sous-groupe normal de G. Alors G est résoluble si et seulement si N et G/N sont résolubles.

Solution.

(a) Soit $G = H_0 > H_1 > \ldots > H_m = \{e\}$ une suite de sous-groupes de G tels que H_i est normal dans H_{i-1} et le quotient $H_{i-1}/H-i$ est abélien, pour tout $1 \leq i \leq m$. On considère la suite de sous-groupes de H

$$H = H \cap H_0 > H \cap H_1 > \ldots > H \cap H_m = \{e\}.$$

Soit $1 \leq i \leq m$. Il est facile de vérifier que $H \cap H_i$ est normal dans $H \cap H_{i-1}$, car H_i est normal dans H_{i-1}. De plus, comme $(H \cap H_{i-1}) \cap H_i = H \cap H_i$, par le deuxième théorème d'isomorphisme, on a que

$$\frac{H \cap H_{i-1}}{H \cap H_i} = \frac{H \cap H_{i-1}}{(H \cap H_{i-1}) \cap H_i} \cong \frac{(H \cap H_{i-1})H_i}{H_i}.$$

Or le quotient $(H \cap H_{i-1})H_i/H_i$ est un sous-groupe de H_{i-1}/H_i, par le théorème de correspondance, donc il est abélien. Ainsi $(H \cap H_{i-1})/(H \cap H_i)$ est abélien. Cela montre que H est résoluble.

(b) On montre plus généralement que si $f\colon G \to G'$ est un homomorphisme de groupes surjectif, alors G' est résoluble. Soit $G = H_0 > H_1 > \ldots > H_m = \{e\}$ une suite de sous-groupes de G tels que H_i est normal dans H_{i-1} et le quotient H_{i-1}/H_i est abélien, pour tout $1 \leq i \leq m$. On considère la suite de sous-groupes de G'

$$G' = f(H_0) > f(H_1) > \ldots > f(H_m) = \{e\}.$$

Soit $1 \leq i \leq m$. Il est facile de vérifier que $f(H_i)$ est normal dans $f(H_{i-1})$, car H_i est normal dans H_{i-1} et f est un homomorphisme. De plus, l'application

$$\overline{f}\colon H_{i-1}/H_i \to f(H_{i-1})/f(H_i),\ xH_i \mapsto f(x)f(H_i),$$

est bien définie et c'est un homomorphisme de groupes sujectif. Comme H_{i-1}/H_i est abélien, son image $\overline{f}(H_{i-1}/H_i) = f(H_{i-1})/f(H_i)$ est aussi abélienne. Cela montre que G' est résoluble. En appliquant ce résultat à l'homomorphisme surjectif $q\colon G \to G/N$, on obtient que G/N est résoluble.

(c) Par (a) et (b), on a que si G est résoluble, alors N et G/N sont résolubles. Par un résultat du cours, on a que si N et G/N sont résolubles, alors G est résoluble.

Groupes symétriques

Exercice 6. Soit G un groupe. On dit que deux éléments x et y de G sont **conjugués** s'il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur G. La classe d'équivalence d'un élément $x \in G$ pour cette relation s'appelle une **classe de conjugaison**.

Solution. On note $x \sim y$ s'il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. On montre que $\sim$ est un relation d'équivalence.

Réflexivité: Clairement $x \sim x$ puisque $x = exe^{-1}$ pour tout $x \in G$.

Symétrie: Soit $x, y \in G$ tels que $x \sim y$ et soit $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $x = g^{-1}yg$ et donc $y \sim x$.

Transitivité: Soit $x, y, z \in G$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$ et soit $g, h \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$ et $z = hyh^{-1}$. Alors $z = hyh^{-1} = hgxg^{-1}h^{-1} = (hg)x(hg)^{-1}$ et donc $x \sim z$.

Définition. On dit que deux permutations σ et τ du groupe symétrique S_n sont **du même type** si leur factorisation en cycles disjoints ont le même nombre de k-cycles, pour tout $2 \leq k \leq n$. Par exemple, dans S_5, les permutations $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$ et $(3\ 5)(2\ 4\ 1)$ sont de même type (le type $2 + 3$).

Exercice 7. On considère le groupe symétrique S_n. Montrer que:

(a) deux permutations σ et τ de S_n sont conjuguées si et seulement si elles sont du même type. *(Utiliser l'Exercice 6 (a) Série 5).*

(b) un sous-groupe $H < S_n$ est normal si et seulement si, lorsque $\sigma \in H$, tous les éléments du même type que σ sont aussi dans H.

Solution.

(a) A l'Exercice 6 (a) Série 5, on a montré que si $\sigma = (i_1 \ \dots \ i_k) \in S_n$ est un k-cycle, alors $\gamma\sigma\gamma^{-1} = (\gamma(i_1) \ \dots \ \gamma(i_k))$ est aussi un k-cycle, obtenu en appliquant γ à chaque symbole de σ, pour tout $\gamma \in S_n$. Soit $\sigma \in S_n$ quelconque et soit $\sigma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m$ sa décomposition en cycles disjoints. Alors

$$\gamma\sigma\gamma^{-1} = \gamma\alpha_1\gamma^{-1}\gamma\alpha_2\gamma^{-1} \cdots \gamma\alpha_m\gamma^{-1},$$

où chaque $\gamma\alpha_i\gamma^{-1}$ est un cycle de la même longeur que α_i obtenu en appliquant γ à chaque symbole de α_i (comme ci-dessus), pour $1 \leq i \leq m$. De plus, comme γ est bijective et les α_i sont disjoints, alors les $\gamma\alpha_i\gamma^{-1}$ sont aussi disjoints. Cela montre que, si deux permutations dans S_n sont conjuguées, alors elles sont du même type.

Supposons maintenant que $\sigma, \tau \in S_n$ soient deux permutations de même type. Soient $\sigma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m$ et $\tau = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_m$ les décompositions en cycles disjoints de σ et τ. On ordonne les décompositions de σ et de τ de telle manière que le cycle α_i soit de même longueur que le cycle β_i, pour tout $1 \leq i \leq m$. Pour $1 \leq i \leq m$, supposons que $\alpha_i = (a_{i,1} \ \dots \ a_{i,k_i})$ et $\beta_i = (b_{i,1} \ \dots \ b_{i,k_i})$. On définit une permutation $\gamma \in S_n$ telle que $\gamma(a_{i,j}) = b_{i,j}$ pour tous $1 \leq j \leq k_i$ et $1 \leq i \leq m$. Remarquez que γ est bien une permutation, car chaque $a_{i,j}$ et chaque $b_{i,j}$ n'apparaît qu'une seule fois dans la décomposition de α et de β respectivement. On vérifie alors que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$ et donc α et β sont conjugués.

(b) Comme un sous-groupe $H < S_n$ est normal si et seulement s'il contient la classe de conjugaison de chacun de ses éléments (par définition), on conclut par (a).

Exercice 8. On considère le groupe symétrique S_n.

(a) Montrer que le nombre de classes de conjugaison de S_n est égal au nombre de partitions de n.

(b) Calculer le nombre de classes de conjugaison de S_4. Donner un représentant pour chacune de ces classes et calculer le nombre d'éléments dans chaque classe de conjugaison.

Solution.

(a) Par l'Exercice 7 (a), une classe de conjugaison de S_n est déterminée par le type de factorisation en cycles disjoints. Soit $\sigma \in S_n$ et soit $\sigma = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l$ sa décomposition en cycles disjoints, où α_i est un k_i-cycle, pour $1 \leq i \leq l$. Supposons, sans perdre de généralité, que $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_l$. On écrit $1 + \dots + 1 + k_1 + k_2 + \dots + k_l$ le type de décomposition en cycles disjoints de σ, où le nombre de 1 est égal à $n - \sum_{i=1}^{l} k_i$ (le nombre d'éléments fixés par σ). Par exemple, la permutation $(1\ 2\ 3)(4\ 6)$ dans S_6 est de type $1 + 2 + 3$. En particulier, cela donne une correspondance entre les classes de conjugaison de S_n et les partitions de n.

(b) On résume les données demandées sur S_4 dans le tableau suivant:

Partitions de 4	Représentants	Nombres d'éléments dans la classe de conjugaison
$1+1+1+1$	id	1
$1+1+2$	$(1\ 2)$	$\binom{4}{2}=6$
$1+3$	$(1\ 2\ 3)$	$\binom{4}{3}\cdot\frac{3!}{3}=8$
$2+2$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$\frac{1}{2}\binom{4}{2}=3$
4	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$\frac{4!}{4}=6$

On remarque qu'on a bien compté tous les éléments de S_4 vu que

$$1+6+8+3+6=24=4!=|S_4|.$$