THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 7

1er novembre 2019

Actions de groupes

Exercice 1. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Montrer que, si $x, y \in X$ et $g \in G$ sont tels que $g \cdot x = y$, alors les groupes d'isotrope G_x et G_y sont conjugués dans G. Que se passe-t-il si G_x est un sous-groupe normal de G, pour un certain $x \in X$?

Exercice 2. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X et soit $H < G$ un sous-groupe normal. On note $X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x, \ \forall h \in H\}$ l'ensemble des H-points fixes de X. Montrer que l'action de G sur X induit une action de G/H sur X^H.

Exercice 3 (A rendre pour le 8 novembre)**.** Soient k un corps et $k[x_1, \ldots, x_n]$ l'ensemble des polynômes de n variables à coefficients dans k.

(a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} &S_n \times k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n], \\ &(\sigma, g(x_1, \ldots, x_n)) \mapsto g^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

est une action de groupe.

(b) Soit
$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$
Calculer le groupe d'isotropie $(S_n)_{\Delta_n}$ et l'orbite $\mathcal{O}_{\Delta_n}$ du polynômme $\Delta_n(x_1, \ldots, x_n)$. Vérifier que $|\mathcal{O}_{\Delta_n}| = [S_n : (S_n)_{\Delta_n}]$.

Exercice 4. Soit G un groupe. On considère l'action par conjugaison de G sur lui-même.

(a) Calculer le noyau de l'action
$$\gamma \colon G \to \mathrm{Aut}(G), \ g \mapsto \gamma_g$$
où $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$ pour tout $g, x \in G$. Qu'en déduit-on par le premier théorème d'isomorphisme?

(b) On note $\mathrm{Int}(G)$ l'image de γ. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

(c) Calculer $\mathrm{Aut}(S_3)$ et $\mathrm{Int}(S_3)$.

(d) Soit $\mathbf{Q}$ le groupe des quaternions (défini à l'Exercice 8, Série 3). Calculer $\mathrm{Int}(\mathbf{Q})$.

Exercice 5. Soient G un groupe et X, Y deux G-ensembles. On considère l'ensemble $F(X, Y)$ des applications $f \colon X \to Y$. On définit une action
$$G \times F(X, Y) \to F(X, Y), \ (g, f) \mapsto g * f$$
où $(g * f)(x) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x)$ pour tous $g \in G$, $f \in F(X, Y)$ et $x \in X$.

(a) Montrer que cela définit bien une action du groupe G sur $F(X,Y)$.

(b) Une application $f\colon X \to Y$ est appelée **G-équivariante** si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$. Montrer que l'ensemble des points fixes $F(X,Y)^G$ est l'ensemble de toutes les applications G-équivariantes de X vers Y.

(c) On pose $X = Y = \mathbb{R}$ et on considère l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $1 \cdot x = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Qu'est-ce qu'une application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-équivariante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Transitivité

Définition. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. L'action de G sur X est **transitive** si elle n'admet qu'une seule orbite, i.e. pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.

Exercice 6. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Montrer que G agit transitivement sur chacune des orbites de X.

Exercice 7. Soient G un groupe et $\alpha\colon G \to \mathrm{Perm}(X)$ une action de G sur un ensemble X. On note $g \cdot x = \alpha(g)(x)$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$. Soit $K = \mathrm{Ker}(\alpha)$.

(a) Montrer que K est l'intersection de tous les groupes d'isotropie G_x avec $x \in X$.

(b) Montrer que G/K agit sur X par l'action $gK \cdot x = g \cdot x$ pour tous $g \in G$ et $x \in X$.

(c) Montrer que si l'action de G sur X est transitive, alors l'action de G/K sur X est aussi transitive.

(d) Montrer que si G agit transitivement sur X, alors $|K| \leq \frac{|G|}{|X|}$.