THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 6

25 octobre 2019

Groupe dérivé et centre d'un groupe

Exercice 1. Soit G un groupe. Soit $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. On appelle $[G, G]$ le **groupe dérivé** de G. Montrer que:

(a) le groupe dérivé $[G, G]$ est un sous-groupe normal de G et son quotient $G_{\text{ab}} = G/[G, G]$ est abélien,

(b) si N est un sous-groupe de G tel que $[G, G] \subset N$, alors N est normal et G/N est abélien.

(c) En déduire que $[G, G]$ est le plus petit sous-groupe normal de G pour lequel le groupe quotient est abélien. *(Utiliser aussi l'Exercice 1 (a) Série 5).*

Exercice 2. Calculer le groupe dérivé et l'abélianisé du groupe symétrique S_n, pour $n \geq 1$.

Exercice 3. Soit G un groupe. On note $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ pour tout } x \in G\}$ le **centre** de G. Montrer que:

(a) $Z(G)$ est un sous-groupe normal de G et $Z(G)$ est abélien,

(b) si un sous-groupe $A < G$ est tel que $A \subset Z(G)$, alors A est normal dans G et abélien,

(c) un sous-groupe $A < G$ qui est abélien n'est pas forcément contenu dans le centre $Z(G)$.

(d) Montrer que G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$.

Exercice 4. Soit G un groupe.

(a) Montrer que $[G, G] = \{e\}$ si et seulement si $Z(G) = G$.

(b) Trouver un exemple d'un groupe G tel que $Z(G) = \{e\}$, mais $[G, G] \neq G$.

(c) Trouver un exemple d'un groupe G tel que $[G, G] = G$, mais $Z(G) \neq \{e\}$.

Groupes résolubles

Exercice 5 (A rendre pour le 1^{er} novembre)**.** Soit G un groupe résoluble. Montrer que:

(a) si H est un sous-groupe de G, alors H est résoluble,

(b) si N est un sous-groupe normal de G, alors G/N est résoluble.

(c) En déduire (par une proposition du cours) le résultat suivant: Soient G un groupe et N un sous-groupe normal de G. Alors G est résoluble si et seulement si N et G/N sont résolubles.

Groupes symétriques

Exercice 6. Soit G un groupe. On dit que deux éléments x et y de G sont **conjugués** s'il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur G. La classe d'équivalence d'un élément $x \in G$ pour cette relation s'appelle une **classe de conjugaison**.

Définition. On dit que deux permutations σ et τ du groupe symétrique S_n sont **du même type** si leur factorisation en cycles disjoints ont le même nombre de k-cycles, pour tout $2 \leq k \leq n$. Par exemple, dans S_5, les permutations $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$ et $(3\ 5)(2\ 4\ 1)$ sont de même type (le type $2 + 3$).

Exercice 7. On considère le groupe symétrique S_n. Montrer que:

(a) deux permutations σ et τ de S_n sont conjuguées si et seulement si elles sont du même type. *(Utiliser l'Exercice 6 (a) Série 5).*

(b) un sous-groupe $H < S_n$ est normal si et seulement si, lorsque $\sigma \in H$, tous les éléments du même type que σ sont aussi dans H.

Exercice 8. On considère le groupe symétrique S_n.

(a) Montrer que le nombre de classes de conjugaison de S_n est égal au nombre de partitions de n.

(b) Calculer le nombre de classes de conjugaison de S_4. Donner un représentant pour chacune de ces classes et calculer le nombre d'éléments dans chaque classe de conjugaison.