THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 5

18 octobre 2019

Groupes résolubles

Exercice 1. Soit G un groupe. Montrer que:

(a) si $H < G$ est un sous-groupe normal de G tel que G/H est abélien, alors $[G, G] \subset H$, où

$$[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G, [x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \rangle,$$

(b) G est résoluble si et seulement s'il existe des sous-groupes $G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots, G^{(m)}$, où $m \geq 1$, tels que $G^{(m)} = \{e\}$ et les $G^{(i)}$ sont définis inductivement par

$$G^{(0)} = G \quad \text{et} \quad G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}].$$

Exercice 2. Soit $B_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures, i.e. $A \in B_n$ si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A_{ij} = 0$ pour tous $i > j \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que B_n est un groupe résoluble.

Exercice 3. On dit qu'un groupe G est **simple** s'il n'a pas d'autres sous-groupes normaux que $\{e\}$ et G. Montrer que, si un groupe non abélien G est simple, alors il n'est pas résoluble.

Permutations

Exercice 4. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Pour $x \in G$, on définit l'application

$$T_x : G/H \to G/H, \ \ yH \mapsto xyH.$$

Montrer que:

(a) T_x est une permutation de G/H,

(b) l'application

$$T : G \to \mathrm{Perm}(G/H), \ \ x \mapsto T_x$$

est un homomorphisme de groupes,

(c) le noyau K de T est un sous-groupe de H,

(d) si $[G : H] = n$, alors $|G/K|$ divise $n!$,

(e) si G est fini et $[G : H]$ est le plus petit nombre premier divisant $|G|$, alors H est normal dans G.

Exercice 5. On considère le groupe symétrique S_7. Ecrire:

(a) $(1\ 3\ 5)(2\ 3)(4\ 5\ 6)$ et $(3\ 2\ 7)(1\ 4\ 2)(1\ 3)$ comme composition de cycles disjoints,

(b) $(3\ 2\ 7\ 5\ 6)$ sous la forme de composition de transpositions.

Exercice 6. On considère le groupe symétrique S_n, où $n \geq 1$.

(a) Soient $\sigma \in S_n$ et $\tau = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$ un k-cycle, pour $k \leq n$. Calculer $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

(b) Calculer le centre $Z(S_n) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma\tau = \tau\sigma \text{ pour tout } \tau \in S_n\}$ de S_n.

(c) Soient $\tau_i = (i\ \ i+1) \in S_n$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. Montrer que $S_n = \langle \tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \rangle$ et que $\tau_i\, \tau_{i+1}\, \tau_i = \tau_{i+1}\, \tau_i\, \tau_{i+1}$.

Exercice 7. Montrer que les groupes symétriques S_3 et S_4 sont résolubles.

Exercice 8 (A rendre pour le 25 octobre)**.** Soit G un groupe abélien fini et p un nombre premier. Montrer que si p divise $|G|$, alors G a un élément d'ordre p.
Astuce: faire une récurrence sur $n = |G|$, en commençant par $n = p$.

Exercice 9. Soit G un groupe d'ordre 6. Montrer que:

(a) il existe $g, h \in G$ tels que g est d'ordre 2 et h est d'ordre 3,

(b) G est soit cyclique, soit isomorphe au groupe symétrique S_3.