THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 4

11 octobre 2019

Groupes quotients

Exercice 1. Soient G et N les ensembles

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R},\ ac \neq 0 \right\} \text{ et } N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$$

muni de la multiplication matricielle. Montrer que:

(a) G, avec la multiplication matricielle, forme bien un groupe,

(b) N est un sous-groupe normal de G,

(c) G/N est abélien.

Exercice 2. A l'Exercice 6 de la Série 3, on a montré que $SL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe normal de $GL_n(\mathbb{R})$. Calculer le quotient $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication est isomorphe en tant que groupe au quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, où $\mathbb{C}$ est muni de l'addition.

Exercice 4. Soit p un nombre premier. Montrer que

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}.$$

Exercice 5. (A rendre pour le 18 octobre) Soient G un groupe fini et H un sous-groupe normal de G tel que $(|H|, [G : H]) = 1$. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre $|H|$.
Astuce: Si K est un autre sous-groupe d'ordre $|H|$, que se passe-t-il pour K dans G/H?

Exercice 6. Soit G un groupe. On dit que H un **sous-groupe maximal** de G si, lorsque K est un sous-groupe tel que $H < K < G$, alors $K = H$ ou $K = G$, et on dit que H un **sous-groupe normal maximal** de G si, lorsque N est un sous-groupe normal tel que $H < N < G$, alors $N = H$ ou $N = G$. Montrer que:

(a) H est un sous-groupe normal maximal de G si et seulement si G/H n'a pas de sous-groupe normal (à part lui-même et $\{H\}$),

(b) si H est un sous-groupe maximal et H est normal dans G, alors $[G : H]$ est fini et égal à un nombre premier.

Exercice 7. Prouver le troisième théorème d'isomorphisme.

Soit G un groupe et soient K et H des sous-groupes normaux de G tels que $K < H < G$. Alors H/K est un sous-groupe normal de G/K et

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

Exercice 8. Montrer que:

(a) si H et K sont des sous-groupes normaux d'un groupe G tels que $HK = G$, alors

$$G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

(b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est cyclique,

(c) plus généralement, si $(a, b) = 1$, $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est cyclique.