THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 3

4 octobre 2019

Théorème de Lagrange

Exercice 1. Soit G un groupe fini. Montrer que:

(a) l'ordre d'un élément $x \in G$ divise l'ordre de G;

(b) si $x \in G$ est d'ordre $n = mk$, où $m, k \geq 1$, alors x^k est d'ordre m;

(c) si $x \in G$ est d'ordre n, alors $\{k \in \mathbb{Z} \mid x^k = e\} = n\mathbb{Z}$;

(d) on a $x^{|G|} = e$ pour tout $x \in G$.

Exercice 2. Soit $f\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes. Montrer que:

(a) si $x \in G$ est d'ordre fini, alors l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x;

(b) si G et H sont finis d'ordres premiers entre eux, alors $f(x) = e$ pour tout $x \in G$.

Exercice 3 (A rendre pour le 11 octobre)**.**

(a) Soit G un groupe d'ordre 4. Montrer que G est cyclique ou que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. En déduire que G est abélien.

(b) Montrer que tous les groupes finis d'ordre ≤ 5 sont abéliens.

Exercice 4.

(a) Soit G un groupe. Suppose que $a, b \in G$ commutent et sont d'ordres finis $\mathrm{ord}(a) = n$ et $\mathrm{ord}(b) = m$ respectivement. Montrer que $(ab)^k = e$, où k est le plus petit multiple commun de n et m. En déduire que ab est d'ordre fini.

(b) Soit $G = GL_2(\mathbb{Q})$ et soient $A, B \in G$ donnés par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^4 = I_2 = B^3$, mais que AB est d'ordre infini. En déduire que A et B ne commutent pas.

Sous-groupes normaux

Exercice 5. Montrer que si $H < G$ est un sous-groupe d'indice $[G : H] = 2$, alors H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 6. Montrer que $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe normal, où $GL_n(\mathbb{R})$ est muni de la multiplication matricielle.

Exercice 7. Soient G un groupe et $H, K < G$ deux sous-groupes de G. On définit

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}.$$

Montrer que:

(a) si H et K sont des sous-groupes normaux de G, alors $H \cap K$ est aussi un sous-groupe normal de G;

(b) si H est un sous-groupe normal de G, alors $H \cap K$ est un sous-groupe normal de K;

(c) si H est un sous-groupe normal de G, alors $HK = KH$ et HK est un sous-groupe de G;

(d) si H et K sont des sous-groupes normaux de G, alors HK est un sous-groupe normal de G;

(e) si H et K sont des sous-groupes normaux de G et $H \cap K = \{e\}$, alors $hk = kh$ pour tous $k \in K, h \in H$.

Exercice 8 (Groupe des quaternions)**.** On définit le groupe des quaternions $\mathbf{Q}$ comme étant le sous-groupe $\langle A, B \rangle$ de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner tous les éléments de $\mathbf{Q}$ en termes de A et B et montrer que l'ordre de $\mathbf{Q}$ est 8. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbf{Q}$.

Exercice 9. Montrer que si G est abélien, alors tous les sous-groupes de G sont normaux. Montrer que l'implication inverse est fausse (*Utiliser l'Exercice 8*).