THÉORIE DES GROUPES - SÉRIES 1+2

20 et 27 septembre 2019

Groupes

Exercice 1. Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe. Montrer que:

(a) si $g \cdot a = g \cdot b$ ou $a \cdot g = b \cdot g$, alors $a = b$, pour tous $a, b, g \in G$,

(b) l'élément e est l'unique élément de G tel que $e \cdot g = g = g \cdot e$ pour tout $g \in G$,

(c) chaque élément $g \in G$ a un unique inverse $h \in G$ tel que $h \cdot g = e = g \cdot h$; on écrit $h = g^{-1}$,

(d) $(g^{-1})^{-1} = g$, pour tout $g \in G$.

(e) l'unique élément tel que $g \cdot g = g$ est l'élément e.

Exercice 2. Déterminer si chacune des structures suivantes est une structure de groupe. Si oui, déterminer si la structure est abélienne.

(a) les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ munis de l'addition;

(b) les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ munis de la multiplication;

(c) l'ensemble $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ muni de la multiplication;

(d) l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ d'un ensemble X muni de la différence symétrique $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, pour $A, B \subseteq X$;

(e) l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille $n \times n$ muni de la multiplication matricielle;

(f) étant donné un groupe abélien G et un groupe non-abélien H, leur produit cartésien $G \times H$ muni de la loi $(g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh')$;

(g) l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la loi $x \cdot y = xy + 1$, pour $x, y \in \mathbb{R}$;

(h) l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bc + d)$, pour $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$;

Exercice 3. Soit G un ensemble. On suppose que G admette deux structures de groupes $(\cdot, e)$ et $(*, f)$ telles que, pour tous $a, b, c, d \in G$,

$$(a \cdot b) * (c \cdot d) = (a * c) \cdot (b * d).$$

Montrer que:

(a) les deux structures de groupe sur G coïncident, i.e. $e = f$ et $g \cdot h = g * h$ pour tous $g, h \in G$,

(b) le groupe G muni de ces structures est abélien.

Exercice 4. Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrer que:

(a) si n est pair, alors le nombre d'éléments d'ordre 2 est impair. En particulier, G contient au moins un élément d'ordre 2.

(b) si tous les éléments (sauf l'élément neutre) du groupe G sont d'ordre 2, alors G est abélien.

Sous-groupes

Exercice 5. Vérifier ou réfuter les affirmations suivantes.

(a) L'intersection de n'importe quelle famille de sous-groupes est un sous-groupe.

(b) La réunion de n'importe quelle famille de sous-groupes est un sous-groupe.

(c) L'intersection d'un nombre fini de sous-groupes est un sous-groupe.

(d) La réunion d'un nombre fini de sous-groupes est un sous-groupe.

Exercice 6. Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants est un sous-groupe.

(a) munis de l'addition, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;

(b) munis de la multiplication, $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$, où $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$;

(c) le sous-ensemble $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \subset S^1$ des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, muni de la multiplication;

(d) le sous-ensemble $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \subset GL_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle.

Homomorphismes de groupes

Exercice 7. Soit $f\colon (G, \cdot, e) \to (H, *, e')$ un homomorphisme de groupe. Montrer que:

(a) $f(e) = e'$,

(b) si $g \in G$, alors $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$,

(c) si f est bijectif, alors son inverse $f^{-1}\colon H \to G$ est aussi un isomorphisme de groupes.

Exercice 8. Soit $f\colon (G, \cdot, e) \to (H, *, e')$ un homomorphisme de groupe. Vérifier ou réfuter les affirmations suivantes.

(a) Le noyau de f est un sous-groupe de G.

(b) L'image de f est un sous-groupe de H.

(c) La préimage $f^{-1}(K)$ d'un sous-groupe $K \subset H$ est un sous-groupe de G.

(d) L'image $f(L)$ d'un sous-groupe $L \subset G$ est un sous-groupe de H.

Exercice 9. Vérifier si les applications suivantes sont des homomorphismes de groupes. Si tel est le cas, calculer leur noyau et leur image.

(a) l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ k \mapsto n \cdot k$, où $\mathbb{Z}$ est muni de l'addition et $n \in \mathbb{N}$ est fixé;

(b) l'inclusion $f\colon \{0, 1\} \to \mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}$ est muni de l'addition et $\{0, 1\}$ est tel que 0 est l'élément neutre et $1 + 1 = 0$;

(c) l'application $f\colon \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ qui envoie un nombre pair sur 0 et un nombre impair sur 1, où $\mathbb{Z}$ et $\{0,1\}$ sont définis comme ci-dessus;

(d) l'application $f_r\colon \mathbb{R} \to S^1,\ x \mapsto \exp(irx)$, où $\mathbb{R}$ est muni de l'addition, S^1 est muni de la multiplication et $r \in \mathbb{R}$ est fixé;

(e) l'application $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*,\ x \mapsto \exp(x)$, où $\mathbb{R}$ est muni de l'addition et $\mathbb{R}^*$ de la multiplication;

(f) l'application $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto \exp(z)$, où $\mathbb{C}$ est muni de l'addition et $\mathbb{C}^*$ de la multiplication;

(g) l'application $\gamma_x\colon G \to G,\ g \mapsto x \cdot g \cdot x^{-1}$, où G est un groupe et $x \in G$ est fixé.

Exercice 10 (A rendre). Soit G un groupe.

(a) Montrer que G est abélien si et seulement si l'application $f\colon G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ est un homomorphisme de groupes.

(b) Supposons que G soit fini. Soit $f\colon G \to G$ un isomorphisme tel que

  (i) si $f(g) = g$, alors $g = e$, et

  (ii) $f \circ f$ est l'identité sur G.

  Montrer que G est abélien.

  Astuce: remarquez que tous les éléments de G sont de la forme $g^{-1} \cdot f(g)$.

Exercice 11. On pose

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \neq 0 \right\}.$$

Montrer que G est un groupe muni de la muliplication matricielle. Construire un isomorphisme entre G et $\mathbb{C}^*$ (muni de la multiplication).