Topologie algébrique
Série 13

27.05.2019

L'exercice 3 peut être rendu le 03.06.2019.

1. (Relation entre homologie simpliciale et homologie singulière) Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial.

   (a) Soient $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ deux sous-complexes de $\mathcal{K}$ tels que $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}' = \mathcal{K}$. Montrer que $\big(|\mathcal{K}|; |\mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_2|\big)$ est un triplet excisif.

   (b) Pour tout $n \geq 0$ et n'importe quelle orientation $<$ de $\mathcal{K}$, considérer l'homomorphisme $\psi_n : C_n(\mathcal{K}, <) \to S_n\big(|\mathcal{K}|\big)$ spécifié par

   $$\psi_n(v_0, ..., v_n) : \Delta^n \to |\mathcal{K}| : (t_0, ..., t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i.$$

   Poser $\psi = (\psi_n)_{n \geq 0}$. Montrer que $\psi : C_*(\mathcal{K}, <) \to S_*\big(|\mathcal{K}|\big)$ est un morphisme de complexes de chaînes.

   (c) Par récurrence sur le nombre de simplexes de $\mathcal{K}$, montrer que $H_n\psi$ est un isomorphisme pour tout n, si $\mathcal{K}$ est fini.

   (d) Utilisant que pour tout sous-espace compact X de $|\mathcal{K}|$, il existe un sous-complexe fini $\mathcal{L}$ tel que $X \subseteq |\mathcal{L}|$, démontrer que $H_n\mathcal{K} \cong H_n^{\mathrm{sing}}|\mathcal{K}|$ pour tout complexe simplicial $\mathcal{K}$.

2. Démontrer les propriétés suivantes de Tor, pour tout groupe abélien G.

   (a) La définition de $\mathrm{Tor}(G, H)$ est indépendante (à isomorphisme près) de la résolution de G choisie.

   Astuce: Considérer deux résolutions de G comme des complexes de chaînes (nuls presque partout). Une preuve semblable à celle du Théorème des modèles acycliques vous permettra de montrer que ces deux complexes sont homotopes.

   (b) $\mathrm{Tor}(G, H) \cong \mathrm{Tor}(H, G)$ pour tout groupe abélien H.

   Astuce: Tensoriser ensemble des résolutions de G et de H.

(c) $\mathrm{Tor}(G, -)$ s'étend en un foncteur $\mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$.

(d) $\mathrm{Tor}(G, \mathbb{Z}) = 0$.

(e) $\mathrm{Tor}(G, \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} H_j) \cong \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \mathrm{Tor}(G, H_j)$ pour toute famille de groupes abéliens $\{H_j \mid j \in \mathcal{J}\}$.

(f) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) = \{a \in G \mid ma = 0\}$ pour tout entier positif m. (En déduire les valeurs de $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et de $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.)

3. Calculer

   (a) $H_*(\mathbb{C}P^m; A)$, où A est un groupe abélien quelconque,

   (b) $H_*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{F}_p)$ où p est un nombre premier,

   (c) $H_*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Q})$,

   (d) $H_*(\mathbb{C}P^m \times \mathbb{C}P^n)$,

   (e) $H_*(\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n)$, et

   (f) $H_*(\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n; \mathbb{F}_2)$.

4. (Analyse d'homologie caractéristique par caractéristique)

   (a) Montrer que $\widetilde{H}_n X = 0$ pour tout n si et seulement si $\widetilde{H}_n(X; \mathbb{Q}) = 0$ et $\widetilde{H}_n(X; \mathbb{F}_p) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout premier p.

   (b) Montrer qu'une application continue $f : X \to Y$ est telle que $H_n f$ est un isomorphisme pour tout n si et seulement si $\widetilde{H}_n(f; \mathbb{Q})$ et $\widetilde{H}_n(f; \mathbb{F}_p)$ sont des isomorphismes pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout premier p.