

Topologie algébrique

Série 12

20.05.2019

L'exercice 4 est à rendre le 27.05.2019.

1. Faire l'exercice 2(c) de la Série 11.
2. (CW-complexes) Supposons que X_0 soit un espace discret, et que, pour tout $n \geq 1$, un espace X_n soit construit par attachement de n -cellules (i.e., disques D^n) à X_{n-1} . Poser $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ et supposons que sa topologie vérifie la condition suivante: $A \subset X$ est fermé si et seulement si $A \cap X_n$ est fermé dans X_n pour tout n . (On dit alors que X est un *CW-complexe*, et $C(\mathcal{F})$ est appelé le *complexe cellulaire* de X , où \mathcal{F} est la filtration évidente de X .)
 - (a) Montrer que $H_k^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1}) = 0$ si $k \neq n$ et que $H_n^{\text{sing}}(X_n, X_{n-1})$ est abélien libre sur une base formée des n -cellules de X_n .
 - (b) Montrer que $\tilde{H}_k^{\text{sing}} X_n = 0$ pour tout $k > n$ et que l'inclusion $X_n \hookrightarrow X$ induit des isomorphismes $\tilde{H}_k^{\text{sing}} X_n \cong \tilde{H}_k^{\text{sing}} X$ pour tout $k < n$. Conclure que $H_n C(\mathcal{F}) \cong H_n X$ pour tout n .
 - (c) Montrer que si X est un CW-complexe qui n'a aucune n -cellule, alors $\tilde{H}_n^{\text{sing}} X = 0$.
 - (d) Calculer $\tilde{H}_*^{\text{sing}}(S^m \times S^n)$ pour $m, n > 1$.
3. (Espaces de Moore)
 - (a) Soient $m > 0$ et $n \geq 1$. Construire par attachement de cellule un espace topologique $M(\mathbb{Z}/m, n)$ (appelé un *espace de Moore*) tel que
$$\tilde{H}_k^{\text{sing}}(M(\mathbb{Z}/m, n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m & : k = n \\ 0 & : \text{sinon.} \end{cases}$$
 - (b) Etant donné une suite $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ de groupes abéliens de génération finie, construire un espace topologique X tel que

$$\tilde{H}_k^{\text{sing}}(X) = \begin{cases} 0 & : k = 0 \\ G_k & : k > 0. \end{cases}$$

4. (Espaces projectifs réels) Soit $\mathbb{R}P^n$ l'espace projectif réel de dimension n , i.e., l'espace des droites dans \mathbb{R}^{n+1} qui passent par l'origine. Plus explicitement, $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, où

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \lambda x'.$$

- (a) Montrer que $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$, où $x \sim -x$ pour tout $x \in S^n$.
- (b) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est compact et de Hausdorff.
- (c) Montrer que l'inclusion $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ induit une inclusion $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$.
- (d) Montrer que $\mathbb{R}P^0$ est un singleton et que $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.
- (e) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est obtenu à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ en attachant D^n le long de l'application quotient $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$.
- (f) Calculer $\tilde{H}_k^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n)$ pour tout n et tout k . (Attention à la différence entre les cas n pair et n impair, due au fait que l'homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ provenant de l'application du foncteur H_{n-1}^{sing} à la composition

$$S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1} / \mathbb{R}P^{n-2} \cong S^{n-1}$$

est 0 si n est impair et multiplication par 2 si n est pair.)