Topologie algébrique
Série 10

06.05.2019

L'exercice 3 est à rendre le 13.05.2019.

1. Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il n'existe aucune rétraction $r : D^n \to S^{n-1}$ (i.e., aucune application continue r telle que sa restriction à S^{n-1} soit l'identité). Déduire que toute application continue $f : D^n \to D^n$ admet au moins un point fixe, i.e., il existe $z \in D^n$ tel que $f(z) = z$.

2. Soit $n \geq 1$.

   (a) Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout isomorphisme $\alpha : H_n^{\text{sing}} S^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$

   $$\alpha \circ H_n^{\text{sing}}(f) \circ \alpha^{-1}(1) = m.$$

   Cet entier, noté $\deg f$, est appelé le *degré* de f.

   (b) Montrer que $\deg(g \circ f) = (\deg g)(\deg f)$ quelques soient $f, g : S^n \to S^n$. En déduire que $\deg \mathrm{Id}_{S^n} = 1$, que $\deg c_{z_0} = 0$ pour tout $z_0 \in S^n$ (où c_{z_0} désigne l'application constante sur z_0), et que $\deg h = \pm 1$ pour tout homéomorphisme $h : S^n \to S^n$.

   (c) Soit $[S^n, S^n]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de S^n vers S^n. Montrer qu'il y a une application surjective bien définie

   $$\delta : [S^n, S^n] \to \mathbb{Z} : [f] \mapsto \deg f.$$

   (**Astuce:** Commencer par $n = 1$ et ensuite suspendre.)

   (d) Montrer que si $n = 1$, alors $\delta\big([f]\big) = 0$ si et seulement s'il existe $z_0 \in S^1$ tel que $f \simeq c_{z_0}$.
   (**Astuce:** Considérer d'abord le cas où $f(1) = 1 = z_0$.)

3. (Invariance de dimension)

   (a) Montrer que $\widetilde{H}_k^{\text{sing}}(S^n) = 0$ pour tout $k \neq n$.

(b) Soient $U \subseteq \mathbb{R}^m$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts (par rapport à la topologie standard). Montrer que si U et V sont homéomorphes, alors $m = n$. (Indication: choisir $x \in U$ et considérer le couple $\big(U, U \smallsetminus \{x\}\big)$...)

4. (Quotients homotopiques) Soit (X, A) un couple d'espaces topologiques. Le *quotient homotopique* de X par A est l'espace

$$X \cup CA = X \coprod CA/\sim,$$

où CA est le cône sur A et $a \sim (a, 0)$ pour tout $a \in A$. Montrer que $\widetilde{H}_n^{\text{sing}}(X \cup CA) \cong H_n^{\text{sing}}(X, A)$ pour tout n. (Ce résultat nous permet d'interpréter l'homologie du couple (X, A) comme l'homologie d'un seul espace, même lorsque A n'est pas rétraction par déformation d'un ouvert de X.)