TOPOLOGIE - QUIZ 13

Question 1. Quel est le groupe fondamental d'un espace basé (X, x_0) lorsqu'il est muni

(a) de la topologie discrète?

(b) de la topologie grossière?

Question 2 (Choix multiple). Soit X et Y deux espaces topologiques non vides. Les applications continues $f\colon X \to Y$ telles qu'il existe une application constante c_f avec $f \simeq c_f$ forment une classe d'homotopie.

(a) C'est toujours vrai.

(b) C'est toujours faux.

(c) Cela dépend de X.

(d) Cela dépend de Y.

(e) Cela dépend de X et de Y.

TOPOLOGIE - SÉRIE 14

Exercice 1. Prouver que $exp\colon \mathbb{R} \to S^1$, définit par $exp(x) := (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ est un revêtement.

Exercice 2. Soit B un espace topologique.

(a) Montrer que si F est un espace topologique discret, alors $pr_2\colon F \times B \to B$ est un revêtement pour tout l'espaces topologiques B.

(b) Pour deux revêtements $p\colon E \to B$, $p'\colon E' \to B'$, montrer que l'application produit $p \times p'\colon E \times E' \to B \times B'$ est aussi un revêtement.

(c) Soient $p\colon E \to B$ un revêtement et $A \subseteq B$ un sous-espace. Montrer que $p\colon p^{-1}(A) \to A$ est aussi un revêtement.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application continue

$$p\colon S^1 \to S^1, \quad z \mapsto z^n$$

est un revêtement de S^1.

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}P^2$ l'espace topologique défini comme le quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ par la relation d'équivalence engendrée par

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}.$$

On peut aussi voir $\mathbb{R}P^2$ comme l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine. On l'appelle le **plan projectif réel**. Montrer que l'application $f\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$, qui envoie un point $P \in S^2$ sur la droite qui passe par P et par l'origine, est un revêtement.

Exercice 5. Soit $p\colon E \to B$ un revêtement et soit $\lambda\colon I \to B$ un chemin dans B. Montrer qu'un relèvement $\hat{\lambda}\colon I \to E$ de λ est unique, où un *relèvement* de λ une application continue $\hat{\lambda}$ telle que $p \circ \hat{\lambda} = \lambda$.

Exercice 6. (Argument de Eckmann-Hilton)

(a) Soit X un ensemble avec deux opérations binaires $\cdot, *\colon X \times X \to X$
- dont les deux possèdent une **unité**, i.e., ils existent e, $f \in X$ avec

$$e \cdot x = x \cdot e = x \text{ et } f * x = x * f = x \qquad \text{pour } x \in X$$

- qui vérifient la **loi d'échange**, i.e.,

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d) \qquad \text{pour tous } a, b, c, d \in X.$$

Montrer que les deux unités ainsi que les deux opérations coïncident et cette opération est associative et commutative.

(b) En conclure que pour un groupe topologique G avec unité e, le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Date: 27 mai 2019