TOPOLOGIE - QUIZ 12

Question 1. Vrai ou faux?

(a) Deux espaces topologiques homéomorphes sont homotopes.

(b) Deux espaces topologiques homotopes sont homéomorphes.

(c) La lettre "A" est homotope à la lettre "O".

(d) La lettre "A" est homéomorphe à la lettre "O".

Question 2. Vrai ou faux?

(a) Un espace topologique X est contractile si et seulement l'application identité $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ est homotope à une application constante $c_y \colon X \to X, x \mapsto y$, pour un certain $y \in X$.

(b) Un espace topologique pointé (X, x_0) est contractile si et seulement l'application identité $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ est homotope à l'application constante $c_{x_0} \colon X \to X, x \mapsto x_0$.

(c) Le n-disque D^n est contractile, pour tout $n \geqslant 0$.

(d) Le n-disque D^n est homéomorphe à un point, pour tout $n \geqslant 0$.

(e) Un espace contractile est connexe par arcs.

(f) Un espace connexe par arcs est contractile.

TOPOLOGIE - SÉRIE 13

L'exercice 5 peut être rendu pour le 29 mai 2019.

Exercice 1. La **suspension** sur X est

$$\Sigma X := (X \times [0,1])/\!\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1) \sim (y,1)$ et $(x,0) \sim (y,0)$ pour x, $y \in X$. Montrer que $\Sigma S^{n-1} \cong S^n$ pour tout $n \geqslant 1$ et en déduire que la suspension d'un espace topologique n'est pas toujours contractile.

Exercice 2. Soit X un espace topologique pointé, et soit $\pi : I \to S^1$ l'application quotient qui identifie 0 et 1 à un seul point. Montrer que pour tout lacet pointé $\lambda : [0,1] \to X$ avec $\lambda(0) = \lambda(1) = x_0$, il existe une unique application continue $\hat{\lambda} : S^1 \to X$ avec $\hat{\lambda} \circ \pi = \lambda$. Du coup, il existe une bijection entre les lacets pointés $I \to X$ et les applications continues pointées $S^1 \to X$.

Exercice 3. (Homotopie de chemins) Soit X un espace topologique.

(a) Si $\gamma\colon I \to X$ est un chemin et $f\colon I \to I$ une application continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors on a $\gamma \simeq_* \gamma \circ f$.

(b) Pour trois chemins γ_1, γ_2, γ_3 avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, montrer que

$$(\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3 \simeq_* \gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3).$$

(c) Pour un chemin γ et $\varepsilon_{\gamma(0)}$, $\varepsilon_{\gamma(1)}$ les chemins constants en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, montrer que

$$\varepsilon_{\gamma(0)} \star \gamma \simeq_* \gamma \simeq_* \gamma \star \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

(d) Avec la même notation que dans le point précédent, montrer que

$$\gamma \star \bar{\gamma} \simeq_* \varepsilon_{\gamma(0)} \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma} \star \gamma \simeq_* \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

Exercice 4. Montrer les **propriétés fonctorielles** du groupe fondamental, i.e.,

(a) pour (X, x_0) un espace pointé

$$\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

(b) pour $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ applications continues pointées

$$\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f).$$

Exercice 5. Soit X un espace topologique et x et y deux points de X dans la même composante connexe par arcs. Alors

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y).$$

Exercice 6. Soit (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. Montrer que

(a) $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

(b) si (X, x_0) est contractile, alors $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

Date: 21 mai 2019

Exercice 7. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$ avec inclusion $\iota\colon A \hookrightarrow X$.

(a) Si A est un **rétract**, i.e. il existe une **rétraction** $r\colon X \to A$ continue avec $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, montrer que, pour tout $x \in A$, les homomorphismes

$$\pi_1(A,x) \to \pi_1(X,x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(X,x) \to \pi_1(A,x)$$

induits par l'inclusion ι et la rétraction r sont respectivement injectif et surjectif.

(b) Si A est un **rétract par déformation**, i.e. il existe une **rétraction** $r\colon X \to A$ continue avec $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ et $\iota \circ r \simeq_* \mathrm{id}_X$, montrer que, pour tout $x \in A$, les homomorphismes

$$\pi_1(i)\colon \pi_1(A,x) \to \pi_1(X,x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(r)\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(A,x)$$

induits par l'inclusion ι et la rétraction r sont bijectifs.

Exercice 8. [**Théorème du point fixe de Brouwer**]
Utiliser le fait que le cercle S^1 n'est pas une rétraction du disque fermé $\overline{D^2}$ pour démontrer le **Théorème du point fixe**:
Chaque application continue du disque $\overline{D^2}$ vers lui-même admet au moins un point fixe.