TOPOLOGIE - QUIZ 10

Question 1. Est-ce que $\mathbb{Q}$ muni de la topologie standard est connexe? Et $\mathbb{N}$? Et K?

Question 2. Soit X un ensemble quelconque. Quand est-il connexe

(a) par rapport à la topologie du complément fini?

(b) par rapport à la topologie du complément dénombrable?

Question 3. **A savoir**: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ est connexe.

Donner des exemples (si possible!) pour les ensembles de la figure suivante:

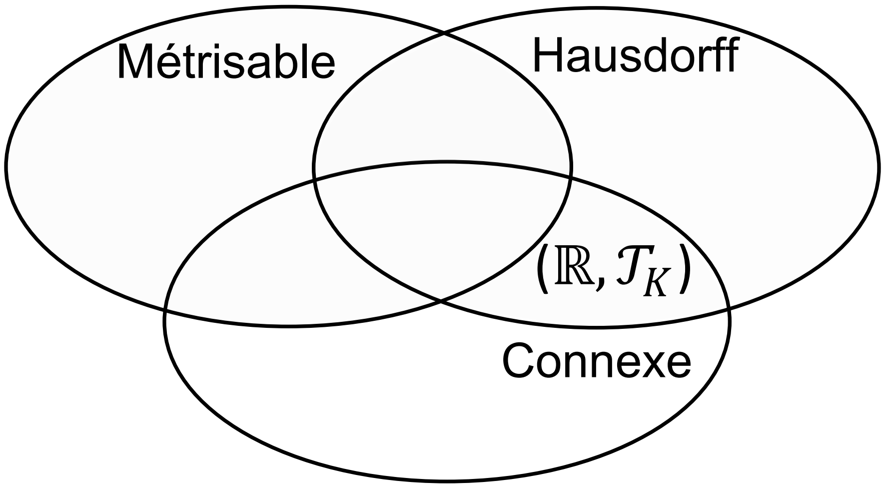

FIGURE 1 – Interactions entre les propriétés d'être de Hausdorff, métrisabilité et connexité.

TOPOLOGIE - SÉRIE 11

Cette série est pour deux séances d'exercices, celles du lundi 13 et mercredi 15 mai 2019. L'exercice 3 peut être rendu pour le mercredi 15 mai 2019 et l'exercice 8 peut être rendu pour le mercredi 22 mai 2019.

Connexité locale (par arcs)

Exercice 1. Par rapport aux topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$, quand est-ce que $\mathbb{R}$ est localement connexe? Et localement connexe par arcs?

Exercice 2. Est-ce que $\mathbb{Q}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie standard? Et K? Et $K \cup \{0\}$? Et $\mathbb{N}$? Et $\mathbb{R}$? Et la courbe du sinus du topologue S? Et $\overline{S}$?

Exercice 3. Montrer qu'être localement connexe (par arcs) est une propriété topologique.

Exercice 4.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs), est-ce qu'il est aussi connexe (par arcs)?

(b) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs), est-ce qu'il est aussi localement connexe (par arcs)?

Exercice 5. Dans cet exercice, on va déterminer la connexité de $\mathbb{R}^\omega$. (Voir Série 5 Exercice 6 pour les définitions de $\mathbb{R}^\omega$ et $\mathbb{R}^\infty$) par rapport à plusieurs topologies différentes.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ est connexe par rapport à la topologie produit.
Indication: Commencer par montrer que $\mathbb{R}^\infty$ *est connexe en tant que réunion de connexes qui s'intersectent*

$$\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\omega,$$

et conclure que son adhérence $\mathbb{R}^\omega$ *est connexe aussi.*

(b) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ n'est pas connexe dans la topologie uniforme.
Indication: Montrer que $\{\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \mathbf{x} \text{ bornée}\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$ *est bien ouvert et fermé, et donc on peut décomposer* $\mathbb{R}^\omega$.

(c) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ n'est pas connexe par rapport à la topologie boîte.
Indication: Utilisez le point (b)!

Exercice 6. Comment est-ce que la connexité (par arcs) locale se comporte par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les énoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ est localement connexe (par arcs).

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ est localement connexe (par arcs).

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $A \subseteq X$, alors A est localement connexe (par arcs).

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $A \subseteq X$ est localement connexe (par arcs), alors $\overline{A}$ est localement connexe (par arcs).

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs).

Date: 9 mai 2019

(f) Si $(X,\mathcal{T})$ est connexe par arcs et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X,\mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs).

(g) Si $(X_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques localement connexes (par arcs), alors leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est localement connexe (par arcs).

(h) Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $A,B\subseteq X$ deux sous-ensembles tels que $X=A\cup B$. Si A et B sont localement connexes (par arcs), alors X est localement connexe (par arcs). Et si ensuite $A\cap B\neq\varnothing$?

(i) Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $A,B\subseteq X$ deux sous-ensembles. Si A et B sont localement connexes (par arcs), alors $A\cap B$ est localement connexe (par arcs).

(j) Si $(X,\mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/_\sim$ l'est aussi.

Homotopies

Exercice 7. Montrer que pour tout couple d'espaces topologiques pointés (X,x_0) et (Y,y_0), la relation d'homotopie $\simeq_*$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues pointées de (X,x_0) vers (Y,y_0).

Exercice 8.

(a) Soit X,Y et Z des espaces topologiques et $f\colon X\to Y$ une application continue. Montrer que f induit des applications sur les ensembles de classes d'homotopie

$$f^*\colon [Y,Z]\to[X,Z],\ [g]\mapsto[g\circ f] \quad \text{et} \quad f_*\colon [Z,X]\to[Z,Y],\ [h]\mapsto[f\circ h],$$

où on note $[X,Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X vers Y.

(b) Soit $(X,x_0),(Y,y_0)$ et (Z,z_0) des espaces topologiques pointés et $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ une application continue pointée. Montrer que f induit des applications sur les ensembles de classes d'homotopie pointée

$$f^*\colon [Y,Z]_*\to[X,Z]_*,\ [g]\mapsto[g\circ f] \quad \text{et} \quad f_*\colon [Z,X]_*\to[Z,Y]_*,\ [h]\mapsto[f\circ h],$$

où on note $[X,Y]_*$ l'ensemble des classes d'homotopie pointée d'applications continues pointées de (X,x_0) vers (Y,y_0).

Exercice 9. Soit X un espace topologique non vide.

(a) Le **cône** sur X est

$$CX := (X\times I)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1)\sim(y,1)$ pour $x,\,y\in X$. Montrer que le cône sur X est contractile.

(b) Le cylindre de X est $[0,1]\times X$ par rapport à la topologie produit. Montrer que le cylindre de X est homotope à X.

Exercice 10. Montrer que les espaces topologiques suivants sont homotopiquement équivalents mais ils ne sont pas homéomorphes.

- S^1
- $S^1\times\mathbb{R}$
- $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$
- $S^1\times D^2$

Exercice 11. Soit X et X' deux espaces topologiques homotopiquement équivalents et Y et Y' deux espaces topologiques homotopiquement équivalents. Montrer que $X\times Y$ et $X'\times Y'$ sont homotopiquement équivalents.