TOPOLOGIE - SÉRIE 9

L'exercice 2 peut être rendu pour le 1er mai 2019.

Exercice 1 (Implication inverse du Lemme d'Urysohn). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On suppose que, pour tous $A, B \subseteq X$ fermés et disjoints, il existe une application continue $f\colon (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ telle que $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$. Montrer que $(X, \mathcal{T})$ est normal.

Solution. Soit $A, B \subseteq X$ deux fermés disjoints. On cherche deux ouverts $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$. Par hypothèse, il existe une application continue $f\colon X \to [0,1]$ telle que $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{1\}$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $U = f^{-1}(\,[0, \varepsilon[\,)$ et $V = f^{-1}(\,]1-\varepsilon, 1]\,)$. Comme f est continue, U, V sont bien ouverts. De plus, $A \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq U$ et $B \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq V$. □

Exercice 2. Démontrer que le Théorème d'extension de Tietze implique le Lemme d'Urysohn.

Preuve. Soit X un espace normal et A, $B \subseteq X$ fermés et disjoints. La fonction

$$f\colon A \cup B \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

est continue par le lemme de recollement et, par le Théorème de Tietze, on peut l'étendre à une fonction $f\colon X \to [0,1]$, ce qui prouve le Lemme d'Urysohn. □

Exercice 3. Donner une preuve directe du Lemme d'Urysohn dans le cas d'un espace métrique (X, d) en définissant $f\colon X \to [0,1]$ par

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Preuve. Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est normal. Soit $A, B \subseteq X$ deux fermés disjoints de X. Soit $f\colon X \to [0,1]$ définie par

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Alors f est continue, car A et B sont disjoints, et, clairement, $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in B$. □

Exercice 4. *Une application du Théorème de Tietze.*
Montrer qu'un espace métrique X est compact si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée.

Preuve.

[$\Longrightarrow$] Si X est compact, pour toute fonction continue $f : (X, \mathcal{T}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$, on a que $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$ par rapport à la topologie standard. Du coup, par le Théorème de Heine-Borel, on sait que $f(X)$ est borné et donc f est bornée.

[$\Longleftarrow$] Montrons maintenant que si X n'est pas compact, alors nous pouvons construire une fonction continue qui n'est pas bornée. Soit X un espace métrique qui n'est pas compact. Alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui n'admet aucune sous-suite convergente, c'est-à-dire, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage qui ne contient aucun x_n (sauf x). Par conséquent si l'on pose $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors

Date: 16 avril 2019

— chaque x_n est isolé et donc A est discret;

— A est fermé dans X.

Sans perdre de généralités, on peut supposer que $x_n \neq x_m$ lorsque $n \neq m$. Considérons la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $x_n \mapsto n \in \mathbb{R}$. Elle est continue parce que la topologie de A est discrète. On peut étendre f à tout l'espace X, en utilisant le Théorème d'extension de Tietze. Clairement, une telle fonction f n'est pas bornée.

Exercice 5. *Une application du Théorème de Métrisabilité.*
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace compact de Hausdorff. On va montrer que, si X s'écrit comme une réunion $X = A \cup B$ avec A, $B \subseteq X$ fermé et métrisable, alors X est aussi métrisable.

(a) Montrer que X est métrisable si et seulement s'il admet une base dénombrable.

(b) Traiter le cas où $A \cap B = \varnothing$.

(c) Traiter le cas où $A \cap B \neq \varnothing$.

Preuve.

(a) Si X est métrisable et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, les boules $B(x, q)$ avec $x \in X$ forment un recouvrement ouvert de X, qui a donc un sous-recouvrement fini $\mathcal{B}_q$. En utilisant l'axiome du choix, on choisit pour tous $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ un tel $\mathcal{B}_q$ et alors $\mathcal{B} := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathcal{B}_q$ est une base dénombrable pour X. Réciproquement, si X a une base dénombrable, on peut appliquer le théorème de métrisabilité d'Urysohn parce que tout espace compact de Hausdorff est régulier.

(b) Noter d'abord que A, B, étant deux sous-espaces fermés de X, sont compacts et donc par (a) possèdent deux bases dénombrables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Mais maintenant, vu que A et B sont disjoints, ils sont aussi ouverts et donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une base dénombrable de X, ce qui montre (encore une fois par (a)) que X est métrisable.

(c) Soyent $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bases dénombrables de A et B. Pour $U \in \mathcal{A}$, on note que

$$U' := U \cup (X \setminus A) \qquad \text{et} \qquad U \setminus B$$

sont ouverts dans X (en fait, U' est le plus grand ouvert de X avec $A \cap U' = U$). En effet, si $\tilde{U} \subseteq X$ est un ouvert tel que $\tilde{U} \cap A = U$, alors

$$U' = U \cup (X \setminus A) = (\tilde{U} \cap A) \cup (X \setminus A) = \tilde{U} \cup (X \setminus A)$$

$$U \setminus B = \tilde{U} \cap A \cap (X \setminus B) = \tilde{U} \cap (X \setminus B) \quad (\text{car } X \setminus B \subseteq A)$$

sont ouverts dans X. De façon similaire, pour $V \in \mathcal{B}$

$$V'' := V \cup (X \setminus B) \qquad \text{et} \qquad V \setminus A$$

sont ouverts dans X. Pour prouver l'énoncé, montrons que la collection $\mathcal{C}$ de tous les sous-ensembles de la forme

$$U' \cap V'',\ U \setminus B,\ V \setminus A \qquad \text{avec} \qquad U \in \mathcal{A},\ V \in \mathcal{B}$$

est une base pour X. Alors, soit $W \subseteq X$ ouvert et $x \in W$. Si $x \in A$ mais $x \notin B$, on trouve $U \in \mathcal{A}$ tel que $x \in U \subseteq W \cap A$. Donc $x \in U \setminus B \subseteq W$ et $U \setminus B \in \mathcal{C}$. Idem pour $x \in B \setminus A$. Finalement, si $x \in A \cap B$, on a qu'il existe $U \in \mathcal{A}$ et $V \in \mathcal{B}$ avec $x \in U \subseteq W \cap A$, $x \in V \subseteq W \cap B$ et donc

$$x \in U' \cap V'' = (U \cap V) \cup (U \setminus B) \cup (V \setminus A) \subseteq W.$$

Exercice 6. Dans la preuve du Théorème de Métrisabilité d'Urysohn, on a montré qu'un espace régulier $(X, \mathcal{T})$ qui admet une base dénombrable peut être plongé dans $([0,1]^{\mathbb{N}}, \star_{\mathbb{N}} \mathcal{T}_{\text{st}})$. Dans cet exercice, on va montrer qu'on peut également plonger $(X, \mathcal{T})$ dans $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_\rho)$, où ρ est la métrique définie par

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n - y_n|\},$$

pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Procéder de la même manière, mais en supposant de plus que $f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$ (en divisant par exemple chaque fonction f_n par n).

Preuve. Comme dans la preuve du Théorème de Métrisabilité d'Urisohn, il existe une famille d'applications continues $\{f_n : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{T}_{\text{st}}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ telle que:

pour tout $U \subseteq X$ ouvert et tout $x \in U$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) > 0$,
$f_n(y) \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $y \in X$ et $f_n(y) = 0$ pour tout $y \in X \setminus U$.

(Diviser chaque fonction f_n par n pour oobtenir la condition supplémentaire.) On définit

$$F : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_\rho), \quad F(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Comme dans la preuve du Théorème de Métrisabilité, on peut montrer que F est injective. De plus, la corestriction de F à $\mathrm{Im}(F)$ est ouverte, car la topologie $\mathcal{T}_\rho$ est plus fine que la topologie produit $\star_{\mathbb{N}} \mathcal{T}_{\text{st}}$. Il reste à voir que F est continue.
Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. On doit trouver un ouvert $U \subseteq X$ tel que $x \in U$ et

$$\rho(F(y), F(x)) < \varepsilon, \text{ pour tout } y \in U.$$

Soit $N > 0$ tel que $\frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n = 1, \cdots, N$, par continuité de f_n, il existe un ouvert $U_n \subseteq X$ tel que $x \in U_n$ et $|f_n(y) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $y \in U_n$. On pose $U = U_1 \cap \cdots \cap U_N$. Montrons que U satisfait la condition ci-dessus. Soit $y \in U$. Si $n \leqslant N$, comme $y \in U_n$, on a que

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $n > N$, comme $f_n(X) \subseteq [0, \frac{1}{n}]$, on a que

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi on obtient

$$\rho(F(y) - F(x)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(y) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et on conclut que F est bien continue et donne un plongement de $(X, \mathcal{T})$ dans $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_\rho)$. □

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

(a) On dit que $(X, \mathcal{T})$ satisfait le **deuxième axiome de dénombrabilité** si $\mathcal{T}$ admet une base dénombrable.

(b) On dit que $(X, \mathcal{T})$ est **séparable** s'il contient un sous-ensemble dense et dénombrable, i.e. s'il existe un sous-ensemble $D \subseteq X$ dénombrable tel que $\overline{D} = X$.

Exercice 7. Par rapport aux topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$ (sauf la topologie du complément dénombrable), quand est-ce qu'il satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité? Et quand est-il séparable?

Preuve.

- Est-ce que $\mathbb{R}$ satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité?
  (a) Topologie grossière: OUI, parce que la topologie est finie.
  (b) Topologie standard: OUI, parce qu'une base dénombrable est donnée par les ouverts (a, b) avec a et b rationels.
  (c) Topologie discrète: NON. Toute base de la topologie discrète doit contenir tous les singletons, et donc il n'existe aucune base dénombrable.
  (d) Topologie de la limite supérieure: NON, et les détails sont donnés dans l'exercice 8(b).
  (e) Topologie supérieure: OUI, parce qu'une base dénombrable est donnée par les ouvert $(-\infty, q)$ avec q rationel.
  (f) Topologie $\mathcal{T}_K$: OUI, parce qu'une base dénombrable est donnée par les ouverts (a, b) et $(a, b) \setminus K$ avec a et b rationels.
  (g) Topologie du complément fini: NON. S'il existait une base dénombrable $\mathcal{B} := \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on peut toujours supposer $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\}$. Alors tout $\mathbb{R} \setminus B_n$ est fini, et

  $$F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus B_n \subseteq \mathbb{R}$$

  est une réunion dénombrable d'ensembles finis, et du coup un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Alors $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ est un ouvert qui ne contient aucun B_n. Contradiction.
- Est-ce que $\mathbb{R}$ est séparable?
  On remarque d'abord que si X est séparable par rapport à une topologie $\mathcal{T}$, alors il l'est aussi par rapport à une topologie $\mathcal{T}'$ moins fine que $\mathcal{T}$. Maintenant, c'est clair que $\mathbb{Q}$ est une partie dense dénombrable dans $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$, et donc les topologies de la limite supérieure, $\mathcal{T}_K$, standard, du complément fini, supérieure et grossière sont séparables . Ensuite, la topologie discrète n'est pas séparable, parce pour tout $Q \subseteq \mathbb{R}$ dénombrable, l'on a que l'adhérence de Q coincide avec Q, qui est strictement contenu dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Comment est-ce que le deuxième axiome de dénombrabilité se comporte par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les enoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ muni de la topologie de sous-espace en admet une aussi. Et si f est aussi ouverte?

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ admet une base dénombrable, et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ muni de la topologie de sous-espace en admet une aussi.

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable et $A \subseteq X$, alors A muni de la topologie de sous-espace en admet une aussi.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ en admet une aussi.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ en admet une aussi.

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont des espaces topologiques admettent une base dénombrable, alors $X \times X'$ muni de la topologie produit en admet une aussi.

(g) Si $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable, et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/\sim$ muni de la topologie quotient en admet une aussi.

Solution.

(a) *OUI, mais seulement si la fonction est ouverte aussi.* En effet, un contre-exemple lorsque la fonction n'est pas ouverte est donnée par

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}}).$$

Par l'exercice 6, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ ne satisfait pas le deuxième axiome de dénombrabilité, alors que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbf{st}})$ le satisfait.

Supposons ensuite que $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ soit une application ouverte vérifiant que $(X, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable $\mathcal{B} := \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Montrons que la collection dénombrable $\{f(B_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ est une base de $(f(X), (\mathcal{T}')_{f(X)})$. On va utiliser la caractérisation des bases vue en cours. Soit $U' \cap f(X) \in (\mathcal{T}')_{f(X)}$ et soit $x' \in U' \cap f(X)$. Ainsi, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = x'$. Par continuité de la fonction il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subseteq f^{-1}(U')$. Enfin en utilisant la caractérisation de base $\mathcal{B}$, on sait qu'il existe un $i \in \mathbb{N}$ tel que $B_i \in \mathcal{B}$ vérifiant $x \in B_i \subseteq U$. Ainsi,

$$x' = f(x) \in f(B_i) \subseteq f(U) \subseteq f(f^{-1}(U')) \subseteq U'.$$

Finalement, comme f est ouverte, $\{f(B_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ est bien une sous-collection de $\mathcal{T}'$ telle que, pour tout $U' \in \mathcal{T}'_{f(X)}$ et $x' \in U'$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x' \in f(B_i) \subseteq U'$, donc finalement bien une base dénombrable de $(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$.

(b) *NON.* En effet, un contre-exemple est donné par

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{disc}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}}).$$

(c) *OUI.* Soit $\mathcal{B} := \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de $(X, \mathcal{T})$. Alors, $\mathcal{B}_A := \{B_i \cap A \mid i \in \mathbb{N}\}$ est une base de dénombrable de A. Pour commencer, $\mathcal{B}_A$ est bien une sous-collection de $\mathcal{T}_A$. Soit $U \cap A \in \mathcal{T}_A$ un ouvert (donc $U \in \mathcal{T}$) et soit $x \in U \cap A$. Alors par définition et comme $x \in U$ alors il existe $B_i \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_i \subseteq U$. Ce qui implique que $x \in B_i \cap A \subseteq U \cap A$. Par la caractérisation des bases, $\mathcal{B}_A := \{B_i \cap A \mid i \in \mathbb{N}\}$ est bien une base dénombrable de $(A, \mathcal{T}_A)$.

(d) *NON.* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ admet une base dénombrable alors que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{disc}})$ non et on vérifie bien que $\mathcal{T}_{\mathrm{st}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathrm{disc}}$.

(e) *NON.* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ admet une base dénombrable alors que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ non et on vérifie bien que $\mathcal{T}_{\mathrm{cof}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathrm{st}}$.

(f) *OUI.* Soit $\mathcal{B}_X$ la base dénombrable de $(X, \mathcal{T})$ et $\mathcal{B}_{X'}$ la base dénombrable de $(X', \mathcal{T}')$. Montrons que

$$\mathcal{B}_{X \times X'} = \{B \times B' \mid B \in \mathcal{B}_X \text{ and } B' \in \mathcal{B}_{X'}\}$$

est bien la base recherchée. En effet, c'est une sous-collection dénombrable de $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$, car un produit d'ensemble dénombrable est dénombrable. Finalement, soit $U \times U'$ un ouvert de $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$, et soit $(x, y) \in U \times U'$. Alors, par le fait que $\mathcal{B}_X$ est une base, on sait qu'il existe $B \in \mathcal{B}_X$, tel que $x \in B \subseteq U$. De même, par le fait que $\mathcal{B}_{X'}$ est une base, on sait qu'il existe $B' \in \mathcal{B}_{X'}$, tel que $y \in B' \subseteq U'$. Ainsi, $(x, y) \in B \times B' \subseteq U \times U'$, ce qui conclut la preuve, par la caractérisation.

(g) *NON.* Prendre $\mathbb{R}$ muni de la topologie standard, et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le quotient de $\mathbb{R}$ par rapport à la relation déquivalence

$$x \sim y \quad \iff \quad \{x, y\} \subseteq \mathbb{Z} \text{ ou } x = y.$$

On peut voir ce quotient comme une *fleur avec un nombre infini de pétales*. On montre que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ne satisfait pas le deuxième axiome de dénombrabilité. Supposons qu'il existe une base dénombrable pour la topologie quotient. On considère la famille $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tous les éléments de cette base qui contiennent $[0]$. On va construire un ouvert U du quotient qui contient $[0]$ et qui ne contient aucun U_n, ce qui contredit le fait qu'on ait commencé avec une base.

Comme tout U_n est ouvert dans le quotient et contient $[0]$, $\pi^{-1}(U_n)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et contient $\mathbb{Z}$. En particulier, il existe $0 < d_n < \frac{1}{2}$ tel que $[n - d_n, n + d_n] \subseteq \pi^{-1}(U_n)$. On pose alors

$$V := \bigcup_{n=0}^{\infty} (n - d_n, n + d_n) \subseteq \mathbb{R}.$$

Comme $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Z}$, alors $U := \pi(V)$ est un ouvert du quotient qui contient $[0]$. Pourtant U ne contient aucun U_n. En fait, si U contenait U_n pour quelque n, alors

$$\begin{aligned}(n - d_n, n + d_n) = V \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) &= \pi^{-1}(U) \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \\ &\supseteq \pi^{-1}(U_n) \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \supseteq [n - d_n, n + d_n],\end{aligned}$$

ce qui donne une contradiction.

Exercice 9.

(a) Montrer qu'un espace métrisable et séparable admet une base dénombrable.

(b) Conclure que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ n'est pas métrisable (alors qu'il est normal!).

Solution.

(a) Si (X, d) est un espace métrique avec Q une partie dense dénombrable, il suffit de considérer la base donnée par

$$\mathcal{B} := \{B_X(q, \frac{1}{n})\}_{(q,n)\in Q\times\mathbb{N}},$$

qui est bien dénombrable.

(b) Le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$, car chaque ouvert de base $(a, b]$ doit nécessairement contenir un nombre rationnel. Ensuite, on montre que chaque base de topologie pour $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ est indénombrable. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\limsup}$ une base pour $\mathcal{T}_{\limsup}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subseteq (x - 1, x]$. Lorsque $x > y$, on a que

$$x > y = \max(y - 1, y] \geq \max B_y.$$

En particulier $x \in B_x \setminus B_y$ et $B_x \neq B_y$. Autrement dit, la correspondance $x \mapsto B_x$ définit une application injective $\mathbb{R} \to \mathcal{B}$, et donc $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{B}|$. Ainsi $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ n'est pas métrisable.