TOPOLOGIE - SÉRIE 14

Exercice 1. Prouver que $exp\colon \mathbb{R} \to S^1$, définit par $exp(x) := (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ est un revêtement.

Preuve. Consider the cover of S^1 given by

$$U_1 := S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}, \quad U_2 := S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\},$$

$$U_3 := S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\} \text{ and } U_4 := S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < 0\}.$$

We will show that U_1 is evenly covered by exp, a similar argument works for the other open sets in the cover. The set $exp^{-1}(U_1)$ is the union of intervals $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ for all n in $\mathbb{Z}$. The restriction of exp to $\overline{V_n}$, the closure of V_n in $\mathbb{R}$, has values in $\overline{U_1}$ and is an isomorphism. Since $\overline{V_n}$ is compact, the restriction of exp to $\overline{V_n}$ is an homeomorphism of $\overline{V_n}$ with $\overline{U_1}$. Furthermore this map carries V_n surjectively onto U_1 and induces an homeomorphism of V_n with U_1. □

Exercice 2. Soit B un espace topologique.

(a) Montrer que si F est un espace topologique discret, alors $pr_2\colon F \times B \to B$ est un revêtement pour tout l'espaces topologiques B.

(b) Pour deux revêtements $p\colon E \to B$, $p'\colon E' \to B'$, montrer que l'application produit $p \times p'\colon E \times E' \to B \times B'$ est aussi un revêtement.

(c) Soient $p\colon E \to B$ un revêtement et $A \subseteq B$ un sous-espace. Montrer que $p\colon p^{-1}(A) \to A$ est aussi un revêtement.

Solution.

(a) If F is a discrete topological space, then $F \times B$ is homeomorphic to $\amalg_{x \in F} B$. Therefore the projection $pr_2 : \amalg_{x\in F} B \to B$ is trivially a covering.

(b) Soient $p : E \to B$ and $p' : E' \to B'$ deux revêtements. On va montrer que leur produit $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est aussi un revêtement.
Soit $(b, b') \in B \times B'$ et U, U' deux voisinages ouverts trivialisants de b et b' respectivement. On peut écrire $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} U_i$ et $(p')^{-1}(U') = \bigcup_{i'\in I'} U'_{i'}$, où, pour tout $i \in I$, $i' \in I'$, U_i et U'_i sont des ouverts tels que $p|_{U_i}\colon U_i \cong U$ et $p|_{U'_{i'}}\colon U'_{i'} \cong U'$. Alors $U \times U'$ est un voisinage ouvert trivialisant de (b, b'). En effet, on a que

$$(p \times p')^{-1}(U \times U') = p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U') = (\bigcup_{i\in I} U_i) \times (\bigcup_{i'\in I'} U'_{i'}) = \bigcup_{(i,i')\in I\times I'} (U_i \times U'_{i'})$$

avec $(p \times p')|_{U_i \times U'_{i'}}\colon U_i \times U'_{i'} \cong U \times U'$ pour tout $(i, i') \in I \times I'$.

(c) Soit $p : E \to B$ un revêtement, et $A \subseteq B$. On va montrer que $p' := p|^{A}_{p^{-1}(A)} p^{-1}(A) \to A$ est aussi un revêtement.
Soit $a \in A$ et U un voisinage ouvert trivialisant de a dans X. Alors on peut écrire $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} U_i$, où, pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert tel que $p|_{U_i}\colon U_i \cong U$. Alors $U' := U \cap A$ est un voisinage ouvert trivialisant de a dans A. En effet, on a que

$$(p')^{-1}(U') = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A) = (\bigcup_{i\in I} U_i) \cap p^{-1}(A) = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap p^{-1}(A))$$

et p envoie $U_i \cap p^{-1}(A)$ sur $U \cap A = U'$ homéomorphiquement. □

Date: 29 mai 2019

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application continue

$$p\colon S^1 \to S^1, \quad z \mapsto z^n$$

est un revêtement de S^1.

Preuve. On considère S^1 comme le sous-espace de $\mathbb{C}$

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Soit $z_0 \in S^1$ et $U := S^1 \setminus \{-z_0\}$ un voisinage ouvert de z_0. Alors $p^{-1}(U) = \{z \in S^1 \mid z^n \neq -z_0\}$. Comme l'équation $z^n = -z_0$ a exactement n solutions, $p^{-1}(U)$ consiste en n différentes arcs du cercle, chacun homéomorphe à l'arc de cercle U. □

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}P^2$ l'espace topologique défini comme le quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ par la relation d'équivalence engendrée par

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}.$$

On peut aussi voir $\mathbb{R}P^2$ comme l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine. On l'appelle le **plan projectif réel**. Montrer que l'application $f\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$, qui envoie un point $P \in S^2$ sur la droite qui passe par P et par l'origine, est un revêtement.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}P^2$. Alors $f^{-1}(x)$ consiste en deux points antipodaux P_1 et P_2 de S^2. On définit U_1 et U_2 comme deux hémisphères ouvertes et disjointes telles que $P_1 \in U_1$ et $P_2 \in U_2$. Alors $f(U_1) = f(U_2)$ et on pose $U_x = f(U_1) = f(U_2)$. Alors $\{U_x \mid x \in \mathbb{R}P^2\}$ est un recouvrement tel que $f^{-1}(U_x) = U_1 \sqcup U_2$ et $f : U_i \to U$ est un homéomorphisme pour $i = 1, 2$.

Exercice 5. Soit $p\colon E \to B$ un revêtement et soit $\lambda\colon I \to B$ un chemin dans B. Soit $b = \lambda(0)$ et $e \in p^{-1}(b)$. Montrer qu'un relèvement $\hat{\lambda}\colon I \to E$ de λ tel que $\hat{\lambda}(0) = e$ est unique, où un *relèvement* de λ une application continue $\hat{\lambda}$ telle que $p \circ \hat{\lambda} = \lambda$.

Preuve. Supposons qu'on ait deux relèvements $\hat{\lambda}, \hat{\mu}\colon I \to E$ de λ tels que $\hat{\lambda}(0) = e = \hat{\mu}(0)$, où $\lambda(0) = p(e)$. On pose $X = \{t \in I \mid \hat{\lambda}(t) = \hat{\mu}(t)\}$ et $Y = I \setminus X$.

Comme $\hat{\lambda}(0) = \hat{\mu}(0)$, X est non-vide. On montre que X est ouvert. Soit $t \in X$ et soit $\lambda(t) \in U \subseteq B$ un ouvert trivialisant autour de $\lambda(t)$. On a que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, où les $U_i \subseteq E$ sont des ouverts tels que $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme pour tout $i \in I$. De plus, $p \circ \hat{\lambda}(t) = p \circ \hat{\mu}(t) = \lambda(t) \in U$, donc il existe $i \in I$ tel que $\hat{\lambda}(t) = \hat{\mu}(t) \in U_i$. Alors

$$W = \hat{\lambda}^{-1}(U_i) \cap \hat{\mu}^{-1}(U_i) \subseteq I$$

est un ouvert tel que $t \in W$. De plus, $W \subseteq X$, car $p \circ \hat{\lambda} = p \circ \hat{\mu}$ et $p|_{U_i} : U_i \to U$ est injectif. Cela montre que X est ouvert.

Supposons par l'absurde que $Y \neq \varnothing$. On montre que Y est aussi ouvert, ce qui contredit le fait que I soit connexe. Soit $s \in Y$ et soit $\lambda(s) \in U \subseteq B$ un ouvert trivialisant autour de $\lambda(s)$. On a que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, où les $U_i \subseteq E$ sont des ouverts tels que $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme pour tout $i \in I$. De plus, $p \circ \hat{\lambda}(s) = p \circ \hat{\mu}(s) = \lambda(s) \in U$, donc il existe $i, j \in I$ tels que $\hat{\lambda}(s) \in U_i$ et $\hat{\mu}(s) \in U_j$. Comme $\hat{\lambda}(s) \neq \hat{\mu}(s)$, $p|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme et $p \circ \hat{\lambda} = p \circ \hat{\mu}$, alors $i \neq j$. Donc U_i et U_j sont disjoints. Alors

$$W = \hat{\lambda}^{-1}(U_i) \cap \hat{\mu}^{-1}(U_j) \subseteq I$$

est un ouvert tel que $s \in W$. De plus, $W \subseteq Y$, car $U_i \cap U_j = \varnothing$. Cela montre que Y est aussi ouvert. Contradiction! □

Exercice 6. (Argument de Eckmann-Hilton)

(a) Soit X un ensemble avec deux opérations binaires $\cdot, *\colon X \times X \to X$

- dont les deux possèdent une **unité**, i.e., ils existent e, $f \in X$ avec

$$e \cdot x = x \cdot e = x \text{ et } f * x = x * f = x \qquad \text{pour } x \in X$$

- qui vérifient la **loi d'échange**, i.e.,

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d) \qquad \text{pour tous } a,\, b,\, c,\, d \in X.$$

Montrer que les deux unités ainsi que les deux opérations coïncident et cette opération est associative et commutative.

(b) En conclure que pour un groupe topologique G avec unité e, le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Preuve.

(a) Montrons d'abord que $e = f$:

$$e = e \cdot e = (e * f) \cdot (f * e) = (e \cdot f) * (f \cdot e) = f * f = f.$$

Et montrons que les deux opérations coïncident: Pour a, $b \in X$, on calcule

$$a \cdot b = (a * e) \cdot (e * b) = (a \cdot e) * (e \cdot b) = a * b.$$

Pour l'associativité, on prend $b = e$ dans la loi d'échange et pour la commutativité on prend $a = d = e$.

(b) Pour un groupe topologique, on a deux opérations sur l'ensemble $\pi_1(G, e)$:

$$[\gamma] * [\delta] := [\gamma * \delta] \qquad \text{et} \qquad [\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma \cdot \delta]$$

où $(\gamma \cdot \delta)(t) := \gamma(t) \cdot \delta(t)$ (multiplication dans le groupe topologique). L'opération "$\cdot$" est bien-défini, car si $H\colon \gamma \simeq_* \gamma'$, alors

$$I \times I \to X,\ (t, s) \mapsto H(t, s) \cdot \delta(t)$$

est une homotopie $\gamma \cdot \delta \simeq_* \gamma' \cdot \delta$ et similairement pour $\delta \simeq_* \delta'$. Maintenant, pour quatre lacets γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 en e, on vérifie facilement que

$$(\gamma_1 * \gamma_2) \cdot (\gamma_3 * \gamma_4) = (\gamma_1 \cdot \gamma_3) * (\gamma_2 \cdot \gamma_4)$$

(vraiment égaux, pas seulement homotope). Ainsi $\pi_1(G, e)$ est abélien. $\square$