TOPOLOGIE - SÉRIE 13

L'exercice 5 peut être rendu pour le 29 mai 2019.

Exercice 1. La **suspension** sur X est

$$\Sigma X := (X \times [0,1])/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1) \sim (y,1)$ et $(x,0) \sim (y,0)$ pour x, $y \in X$. Montrer que $\Sigma S^{n-1} \cong S^n$ pour tout $n \geqslant 1$ et en déduire que la suspension d'un espace topologique n'est pas toujours contractile.

Preuve. Considère l'application

$$f : S^{n-1} \times [-1,1] \to S^n \text{ donnée par } (\vec{x}, t) \mapsto (\sqrt{1-t^2}\,\vec{x}, t) \in S^n.$$

On a que

(a) f est bien définie et $f(\vec{x}, \pm 1) = (\vec{0}, \pm 1) = f(\vec{y}, \pm 1)$.
(b) f est continue parce que chaque composante est continue en t et en chacune des composantes de $\vec{x}$.
(c) $f(\vec{x}, t) = f(\vec{y}, s)$ seulement si $(\vec{x}, t) = (\vec{y}, s)$ ou $t = \pm 1$.
(d) f est surjective.
(e) $S^{n-1} \times [-1,1]$ est compact et S^n est de Hausdorff.

Par conséquent,

(a) f induit une application $\overline{f}$ sur ΣS^{n-1}, donnée par $[(\vec{x}, t)] \mapsto (\sqrt{1-t^2}\,\vec{x}, t) \in S^n$.
(b) $\overline{f}$ est continue.
(c) $\overline{f}$ est injective.
(d) $\overline{f}$ est surjective.
(e) ΣS^{n-1} est compact et S^n est de Hausdorff.

Pour conclure, $\overline{f}$ est une application continue et bijective d'un espace compact vers un espace de Hausdorff, donc c'est un homéomorphisme.

Pour $n \geqslant 1$, comme ΣS^{n-1} est homéomorphe à S^{n-1} qui n'est pas contractile, alors ΣS^{n-1} n'est pas contractile non plus. Donc la suspension d'un espace, contrairement à son cône, n'est pas forcément contractile. □

Exercice 2. Soit X un espace topologique pointé, et soit $\pi : I \to S^1$ l'application quotient qui identifie 0 et 1 à un seul point. Montrer que pour tout lacet pointé $\lambda : [0,1] \to X$ avec $\lambda(0) = \lambda(1) = x_0$, il existe une unique application continue $\hat{\lambda} : S^1 \to X$ avec $\hat{\lambda} \circ \pi = \lambda$. Du coup, il existe une bijection entre les lacets pointés $I \to X$ et les applications continues pointées $S^1 \to X$.

Preuve. Comme $\pi : I \to S^1$ est une application quotient, pour toute une application continue $\lambda : I \to X$ telle que $\lambda(0) = \lambda(1)$, il existe une unique application continue $\hat{\lambda} : S^1 \to X$ telle que $f = \hat{f} \circ \pi$, i.e. $\hat{\lambda}([x]) = \lambda(x)$. Ensuite, λ est basée, i.e. $\lambda(0) = x_0$, si et seulement si $\hat{\lambda}$ est basée, i.e. $\hat{\lambda}([0]) = x_0$. □

Date: 21 mai 2019

Exercice 3. (Homotopie de chemins) Soit X un espace topologique.

(a) Si $\gamma\colon I \to X$ est un chemin et $f\colon I \to I$ une application continue, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, alors on a $\gamma \simeq_* \gamma \circ f$.

(b) Pour trois chemins γ_1, γ_2, γ_3 avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$, montrer que

$$(\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3 \simeq_* \gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3).$$

(c) Pour un chemin γ et $\varepsilon_{\gamma(0)}$, $\varepsilon_{\gamma(1)}$ les chemins constants en $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, montrer que

$$\varepsilon_{\gamma(0)} \star \gamma \simeq_* \gamma \simeq_* \gamma \star \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

(d) Avec la même notation que dans le point précédent, montrer que

$$\gamma \star \bar{\gamma} \simeq_* \varepsilon_{\gamma(0)} \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma} \star \gamma \simeq_* \varepsilon_{\gamma(1)}.$$

Preuve. (a) Puisque pour tous t, $s \in I$ on a $(1-s)t + sft \leqslant (1-s) + s = 1$,

$$H\colon I \times I \to I,\ (t,s) \mapsto (1-s)t + sf(t)$$

est bien définie et nous donne une homotopie basée des chemins $\mathrm{id}_I \simeq_* f$, ce qui implique $\gamma \simeq_* \gamma \circ f$.

(b) Soit X un espace topologique et γ_1, γ_2, $\gamma_3\colon I \to X$ trois chemins tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$. Pour l'associativité on doit montrer que les deux chemins

$$(\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \in [0, 1/4] \\ \gamma_2(4t-1) & t \in [1/4, 1/2] \\ \gamma_3(2t-1) & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3)\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(4t-2) & t \in [1/2, 3/4] \\ \gamma_3(4t-3) & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

sont homotopes. Pour le faire, on considère la reparamétrisation

$$r\colon I \to I,\ t \mapsto \begin{cases} 2t & t \in [0, 1/4] \\ t + 1/4 & t \in [1/4, 1/2] \\ (t+1)/2 & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

qui satisfait $\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3) \circ r = (\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3$. On conclut par (a).

(c) Pour l'élément neutre, on prend un chemin γ et

$$r_1\colon I \to I,\ t \mapsto \min\{2t, 1\} \qquad \text{et} \qquad r_2\colon I \to I,\ t \mapsto (t+1)/2$$

pour obtenir $\gamma \circ r_1 = \gamma\varepsilon_{\gamma 1}$ et $\gamma \circ r_2 = \varepsilon_{\gamma 0}\gamma$.

(d) Pour l'inverse γ^{-1} d'un chemin γ,

$$H\colon I \times I \to X,\ (t,s) \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & t \leqslant (1-s)/2 \\ \gamma(1-s) & \text{sinon} \\ \gamma(2-2t) & t \geqslant (1+s)/2 \end{cases}$$

pour obtenir $\gamma \star \gamma^{-1} \simeq \varepsilon_{\gamma 0}$. $\square$

Exercice 4. Montrer les **propriétés fonctorielles** du groupe fondamental, i.e.,

(a) pour (X, x_0) un espace pointé
$$\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

(b) pour $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ applications continues pointées
$$\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f).$$

Preuve. (a) Soit $\lambda : [0, 1] \to X$ une fonction continue telle que $\lambda(0) = \lambda(1) = x_0$, alors
$$\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)})([\lambda]) = [id \circ \lambda] = [\lambda] = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}([\lambda]) \in \pi_1(X, x_0).$$

(b) Soit $\lambda : [0, 1] \to X$ une fonction continue telle que $\lambda(0) = \lambda(1) = x_0$, alors
$$\pi_1(g \circ f)([\lambda]) = [(g \circ f) \circ \lambda] = [g \circ (f \circ \lambda)] = \pi_1(g)[f \circ \lambda] = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)([\lambda]) \in \pi_1(Z, z_0).$$

Exercice 5. Soit X un espace topologique et x et y deux points de X dans la même composante connexe par arcs. Alors
$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y).$$

Let X be a topological space and x, y points in the same connected component of X. For any path $\alpha\colon I \to X$ such that $\alpha(0) = x$ and $\alpha(1) = y$, we define $\hat{\alpha}\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ as $\hat{\alpha}([f]) := [\beta] \star [f] \star [\alpha]$, where $\beta := \alpha(1 - t)$ is the reverse of α . This map is a homeomorphism, in fact it is easy to verify that $\hat{\alpha}([f]) \star \hat{\alpha}([g]) = \hat{\alpha}([f] \star [g])$. We now have to show that $\hat{\alpha}$ is a group isomorphism. Consider the homeomorphism $\hat{\beta}\colon \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$ given by $\hat{\beta}([h]) := [\alpha] \star [h] \star [\beta]$. We can see that $\hat{\alpha} \circ \hat{\beta}([h]) = [\beta] \star ([\alpha] \star [h] \star [\beta]) \star [\alpha] = [h]$. A similar computation shows that $\hat{\beta} \circ \hat{\alpha}([f]) = [f]$ for any $[f] \in \pi_1(X, x)$.

Exercice 6. Soit (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. Montrer que

(a) $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

(b) si (X, x_0) est contractile, alors $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

Preuve.

(a) Les deux projections
$$\mathrm{pr}_1 : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (X, x_0), \qquad \mathrm{pr}_2 : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (Y, y_0)$$
induisent des homomorphismes de groupes
$$\pi_1(\mathrm{pr}_1) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0), \qquad \pi_1(\mathrm{pr}_2) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$$
et donc un homomorphisme de groupes
$$f := (\pi_1(\mathrm{pr}_1), \pi_1(\mathrm{pr}_2)) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$
On va montrer que f est un isomorphisme de groupes. La surjectivité est claire, car si $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ et $[\delta] \in \pi_1(Y, y_0)$, alors $f[(\gamma, \delta)] = ([\gamma], [\delta])$. Pour l'injectivité, soit $[\gamma] \in \operatorname{Ker} f$. Alors on a deux homotopies $H_1\colon \mathrm{pr}_1 \circ\gamma \simeq \varepsilon_{x_0}$ et $H_2\colon \mathrm{pr}_2 \circ\gamma \simeq \varepsilon_{y_0}$, qui définissent l'homotopie
$$H := (H_1, H_2)\colon \gamma = (\mathrm{pr}_1 \circ\gamma, \mathrm{pr}_2 \circ\gamma) \simeq (\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}) = \varepsilon_{(x_0,y_0)}$$
□

Finalement, $[\gamma] = [\varepsilon_{x_0}]$ et f est injective.

(b) Si (X, x_0) est contractile, alors, par la Question 2 (b) du Quiz 13, son groupe fondamental est trivial. Ainsi, par (a) et par le fait que le produit d'un groupe G avec le groupe trivial est isomorphe à G, on obtient

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \cong \{*\} \times \pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

Exercice 7. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$ avec inclusion $\iota\colon A \hookrightarrow X$.

(a) Si A est un **rétract**, i.e. il existe une **rétraction** $r\colon X \to A$ continue avec $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, montrer que, pour tout $x \in A$, les homomorphismes

$$\pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$$

induits par l'inclusion ι et la rétraction r sont respectivement injectif et surjectif.

(b) Si A est un **rétract par déformation**, i.e. il existe une **rétraction** $r\colon X \to A$ continue avec $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ et $\iota \circ r \simeq_* \mathrm{id}_X$, montrer que, pour tout $x \in A$, les homomorphismes

$$\pi_1(i)\colon \pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x) \qquad \text{et} \qquad \pi_1(r)\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$$

induits par l'inclusion ι et la rétraction r sont bijectifs.

Preuve.

(a) De l'égalité $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, on obtient

$$\pi_1(r) \circ \pi_1(\iota) = \pi_1(r \circ \iota) = \pi_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)}.$$

Donc $\pi_1(r)$ est une inverse à gauche et $\pi_1(\iota)$ est une inverse à droite, c'est-à-dire, $\pi_1(r)$ est surjective et $\pi_1(\iota)$ est injective.

(b) De l'homotopie $\iota \circ r \simeq_\star \mathrm{id}_X$, on obtient

$$\pi_1(\iota) \circ \pi_1(r) = \pi_1(\iota \circ r) = \pi_1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}.$$

Donc $\pi_1(r)$ est une inverse à droite et $\pi_1(\iota)$ est une inverse à gauche, c'est-à-dire, $\pi_1(r)$ est injective et $\pi_1(\iota)$ est surjective. En utilisant (a), on conclut qu'ils sont tous deux des isomorphismes.

Exercice 8. [**Théorème du point fixe de Brouwer**]
Utiliser le fait que le cercle S^1 n'est pas une rétraction du disque fermé $\overline{D^2}$ pour démontrer le **Théorème du point fixe**:
Chaque application continue du disque $\overline{D^2}$ vers lui-même admet au moins un point fixe.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe une application continue $f : \overline{D^2} \to \overline{D^2}$ qui n'admet aucun point fixe. On choisit un $x \in \overline{D^2}$ et on définit

$$r : \overline{D^2} \to S^1 \text{ donnée par } r(x) := (\overrightarrow{f(x) \cdot x}) \cap S^1,$$

où $\overrightarrow{y \cdot x}$ dénote la demi-droite qui sort de y vers x privée de y. Une telle fonction r est

- **bien définie**, parce que $x \neq f(x)$ et donc la demi-droite existe toujours, et pour des considérations de géometrie analytique elle doit intersecter le cercle en un unique point. Trouver une formule explicite!
- **continue**, parce que $r(x)$ est l'intersection entre une droite dont la pente dépend de manière continue en x et le cercle S^1;
- **l'identité sur le cercle**;

et donc r est une rétraction. Contradiction! $\square$