TOPOLOGIE - SÉRIE 11

Cette série est pour deux séances d'exercices, celles du lundi 13 et mercredi 15 mai 2019. L'exercice 3 peut être rendu pour le mercredi 15 mai 2019 et l'exercice 8 peut être rendu pour le mercredi 22 mai 2019.

Connexité locale (par arcs)

Exercice 1. Par rapport aux topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$, quand est-ce que $\mathbb{R}$ est localement connexe? Et localement connexe par arcs?

Solution.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ est localement connexe (par arcs), car les singletons sont des ouverts de la topologie discrète qui sont connexes (par arcs).
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{gr}})$ est localement connexe (par arcs), car le seul ouvert non vide de la topologie grossière est $\mathbb{R}$, qui est connexe (par arcs) lorsqu'on le munit de la topologie grossière.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ est localement connexe (par arcs), comme on l'a vu à l'Exercice 2.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ est localement connexe (par arcs). En effet, un ouvert $U \in \mathcal{T}_{\text{cof}}$ est de la forme $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, et U a donc la même cardinalité que $\mathbb{R}$. Ainsi on a un homéomorphisme
$$(U, (\mathcal{T}_{\text{cof}})_U) \cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}}).$$
Comme $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ est connexe (par arcs), alors $(U, (\mathcal{T}_{\text{cof}})_U)$ est aussi connexe par arcs.
Remarque: Pour voir que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ est connexe par arcs, pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer le chemin de 0 vers x
$$(I, (\mathcal{T}_{\text{st}})_I) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}}) \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}}} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}}), \quad t \mapsto tx$$
qui est continu puisque $\mathcal{T}_{\text{cof}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{st}}$.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{sup}})$ est localement connexe (par arcs). Le même genre d'argument que pour $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ fonctionne.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ n'est pas localement connexe (par arcs). En effet, soit $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus K$ un voisinage de 0. Alors tous les voisinages de 0 contenus dans $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus K$ sont aussi de cette forme, donc il suffit de montrer que $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus K$ n'est pas connexe pour prouver que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ n'est pas localement connexe en 0. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Alors
$$]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus K = (\,]-\varepsilon, \frac{1}{n}[\setminus K) \cup (\,]\frac{1}{n}, \varepsilon[\setminus K)$$
est une séparation de $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus K$.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{limsup}})$ n'est pas localement connexe (par arcs). En effet, on remarque d'abord que tout $A \subseteq \mathbb{R}$ qui contient au moins deux éléments $a < a'$ peut être decomposé comme
$$A = (A \cap]-\infty, a]) \cup (A \cap]a, \infty[)\,.$$
Donc les seuls sous-espaces connexes sont les singletons, qui ne sont pas ouverts. Cela montre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{limsup}})$ n'est pas localement connexe. $\square$

Date: 9 mai 2019

Exercice 2. Est-ce que $\mathbb{Q}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie standard? Et K? Et $K \cup \{0\}$? Et $\mathbb{N}$? Et $\mathbb{R}$? Et la courbe du sinus du topologue S? Et $\overline{S}$?

Solution.

- $\mathbb{Q}$ n'est pas localement connexe. En effet, pour tout $a < b \in \mathbb{R}$, on peut séparer l'ouvert $]a, b[\cap \mathbb{Q}$ de comme
$$]a, b[\cap \mathbb{Q} = (\,]a, c[\cap \mathbb{Q}) \cup (\,]c, b[\cap \mathbb{Q}),$$
où $c \in]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
- K est localement connexe par arcs, car pour tout $\frac{1}{n} \in K$, $\{\frac{1}{n}\}$ est un voisinage connexe par arcs.
- $K \cup \{0\}$ n'est pas localement connexe en 0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Soit $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$. Alors on peut séparer l'ouvert
$$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (K \cup \{0\}) = ((-\varepsilon, x) \cap (K \cup \{0\})) \cup ((x, \varepsilon) \cap (K \cup \{0\})).$$
- $\mathbb{N}$ est localement connexe par arcs. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le singleton $\{n\}$ est un voisinage connexe par arcs.
- $\mathbb{R}$ est localement connexe par arcs. En effet, tous les intervalles sont connexes par arcs.
- S est localement connexe par arcs, parce qu'il est homéomorphe à $(0, +\infty)$ via
$$x \in (0, +\infty) \mapsto (x, \sin \frac{1}{x}) \in S.$$
- $\overline{S}$ n'est pas localement connexe. En effet, si on considère une petite boule B_ε autour du point $(0, 0)$, alors $B_\varepsilon \cap \overline{S}$ contient une infinité de segments de S et chacun de ces segments forme une composante connexe de $B_\varepsilon \cap \overline{S}$. Donc aucun voisinage de $(0, 0)$ suffisamment petit n'est connexe. □

Exercice 3. Montrer qu'être localement connexe (par arcs) est une propriété topologique.

Preuve. Soit $\varphi \colon X \to Y$ un homéomorphisme. Supposons que X soit localement connexe (par arcs). Soit $y \in Y$ et $V \subseteq Y$ un ouvert qui contient y. On pose $x = \varphi^{-1}(y)$ et $U = \varphi^{-1}(V) \subseteq X$. Par connexité locale (par arcs) de X, il existe un ouvert $U' \subseteq X$ connexe (par arcs) tel que $x \in U' \subseteq U$. Alors $\varphi(U') \subseteq Y$ est un ouvert connexe (par arcs) tel que $y \in \varphi(U') \subseteq V$. Donc Y est aussi localement connexe (par arcs). □

Exercice 4.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs), est-ce qu'il est aussi connexe (par arcs)?

(b) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs), est-ce qu'il est aussi localement connexe (par arcs)?

Solution. Les deux ne sont pas vraies.

(a) L'espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est localement connexe par arcs, alors qu'il n'est pas connexe.

(b) L'espace $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ est connexe par arcs, alors qu'il n'est pas localement connexe.

□

Exercice 5. Dans cet exercice, on va déterminer la connexité de $\mathbb{R}^\omega$. (Voir Série 5 Exercice 6 pour les définitions de $\mathbb{R}^\omega$ et $\mathbb{R}^\infty$) par rapport à plusieurs topologies différentes.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ est connexe par rapport à la topologie produit.
Indication: Commencer par montrer que $\mathbb{R}^\infty$ *est connexe en tant que réunion de connexes qui s'intersectent*

$$\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\omega,$$

et conclure que son adhérence $\mathbb{R}^\omega$ *est connexe aussi.*

(b) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ <u>n'est pas</u> connexe dans la topologie uniforme.
Indication: Montrer que $\{\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \mathbf{x} \text{ bornée}\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$ *est bien ouvert et fermé, et donc on peut décomposer* $\mathbb{R}^\omega$.

(c) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ <u>n'est pas</u> connexe par rapport à la topologie boîte.
Indication: Utilisez le point (b)!

Preuve.

(a) On montre que le sous-espace $\mathbb{R}^\infty$ est connexe et on conclut que son adhérence $\mathbb{R}^\omega$ l'est aussi.
On identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des suites qui valent 0 à partir du $(n+1)$-ème terme et on remarque que la topologie de $\mathbb{R}^n$ est la même que celle donnée par la topologie de sous-espace sur $\mathbb{R}^\omega$ (muni de la topologie produit). Par un théorème du cours, un produit fini d'espaces connexes est connexe, donc $\mathbb{R}^n$ est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\mathbb{R}$ est connexe. De plus, la suite identiquement nulle est dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n \neq \varnothing$. Par un résultat du cours, cela implique que $\mathbb{R}^\infty$ est connexe comme union de connexes d'intersection non vide.

(b) On va montrer que le sous-ensemble $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbf{x} \text{ est borné}\}$ est à la fois ouvert et fermé dans la topologie uniforme, ce qui donne une séparation

$$\mathbb{R}^\omega = A \cup (\mathbb{R}^\omega \setminus A),$$

de $\mathbb{R}^\omega$ muni de cette topologie, qui n'est donc pas connexe.

- *A est ouvert.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ une suite bornée, c'est-à-dire telle qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ avec $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leqslant B$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{\bar{\rho}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n| = |(y_n - x_n) + x_n| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n| < \frac{1}{2} + B.$$

  Par conséquent, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \leqslant B + \frac{1}{2}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Ceci montre que

$$B_{\bar{\rho}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2}) \subseteq A,$$

  et ainsi A est ouvert.

- *A est fermé.* Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non bornée, c'est à dire telle que, pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $|x_n| > B$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{\bar{\rho}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2})$.
  Soit $B \in \mathbb{R}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| > B + \frac{1}{2}$. Or

$$|x_n| = |(y_n - x_n) + y_n| \leqslant |y_n - x_n| + |y_n|,$$

  donc

$$|y_n| \geqslant |x_n| - |y_n - x_n| > B,$$

  et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Ceci montre que $B_{\bar{\rho}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}^\omega \setminus A$ et ainsi A est fermé.

(c) Puisque la topologie boîte est plus fine que la topologie uniforme, A est aussi ouvert et fermé dans la topologie boîte. Ainsi $\mathbb{R}^\omega$ muni de la topologie boîte n'est pas connexe. □

Exercice 6. Comment est-ce que la connexité (par arcs) locale se comporte par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les énoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ est localement connexe (par arcs).

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ est localement connexe (par arcs).

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $A \subseteq X$, alors A est localement connexe (par arcs).

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $A \subseteq X$ est localement connexe (par arcs), alors $\overline{A}$ est localement connexe (par arcs).

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs).

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est localement connexe (par arcs).

(g) Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques localement connexes (par arcs), alors leur produit $(\prod_{i \in I} X_i, *_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est localement connexe (par arcs).

(h) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles tels que $X = A \cup B$. Si A et B sont localement connexes (par arcs), alors X est localement connexe (par arcs). Et si ensuite $A \cap B \neq \varnothing$?

(i) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles. Si A et B sont localement connexes (par arcs), alors $A \cap B$ est localement connexe (par arcs).

(j) Si $(X, \mathcal{T})$ est localement connexe (par arcs) et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/_\sim$ l'est aussi.

Solution.

(a) *FAUX*: On considère l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \to (\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\text{st}})$, qui est continue. On sait que $\mathbb{Q}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie discrète, mais son image, qui est toujours $\mathbb{Q}$, ne l'est pas par rapport à la topologie standard.

(b) *FAUX*: On considère l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{limsup}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$, qui est continue. On sait que $\mathbb{R}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie standard, mais sa préimage, qui est toujours $\mathbb{R}$, ne l'est pas par rapport à la topologie de la limite supérieure. En effet, $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_{\text{limsup}}$ n'est pas localement connexe. Pour voir cela, on remarque d'abord que tout $A \subseteq \mathbb{R}$ qui contient au moins deux elements $a < a'$ peut être decomposé comme $A := (A \cap (-\infty, a]) \cup (A \cap (a, \infty])$. Donc les seuls sous-espaces connexes sont les singletons. Ça montre que les composantes connexes de $\mathbb{R}$ sont les singletons, qui ne sont pas ouverts, et donc que $\mathbb{R}$ n'est pas localement connexe.

(c) *FAUX*: On sait que $\mathbb{R}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie standard, mais son sous-espace $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

(d) *FAUX*: On sait que S est localement connexe (par arcs), mais son adhérence $\overline{S}$ ne l'est pas.

(e) *FAUX*: On sait que $\mathbb{R}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie standard. Pourtant il ne l'est pas par rapport à la topologie de la limite supérieure, qui est plus fine.

(f) *FAUX*: On sait que $\mathbb{Q}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie discrète. Pourtant il ne l'est pas par rapport à la topologie standard, qui est moins fine.

(g) *VRAI que pour les produits finis*, parce qu'un produit fini de voisinages connexes est toujours un voisinage connexe.
FAUX en général: On sait que $\{0,1\}$ est localement connexe (par arcs) par rapport à la topologie discrète. Pourtant $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ n'est pas localement connexe (par arcs). En effet, on va montrer que les seuls sous-espaces connexes (par arcs) non vides sont les singletons, qui ne sont pas ouverts.

Soit $A \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ un sous-ensemble connexe (par arcs). Alors toute projection $\mathrm{pr}_n(A) \subseteq \{0,1\}$ est connexe (par arcs) et donc $\mathrm{pr}_n(A) \subseteq \{0,1\}$ doit être un singleton. Par conséquent, A est un singleton.

(h) *FAUX*: On sait que $S \subseteq \mathbb{R}^2$ et $\{0\} \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ sont localement connexes (par arcs). Pourtant la réunion $S \cup \{0\} \times [-1,1] = \overline{S}$ n'est pas localement connexe.

On peut modifier cet example de telle manière que l'intersection ne soit pas vide. On sait que $S \subseteq \mathbb{R}^2$ et $(\{0\}\times[-1,1])\cup\{(\frac{1}{\pi},0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sont localement connexes (par arcs). Ensuite l'intersection $S \cap ((\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(\frac{1}{\pi},0)\}) = \{(\frac{1}{\pi},0)\}$, qui n'est pas vide. Pourtant la réunion $S \cup (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(\frac{1}{\pi},0)\} = \overline{S}$ ne l'est pas.

(i) *FAUX*: Soit $A := (\{0\}\times\mathbb{Q})\cup((0,+\infty)\times\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$, et $B := (\{0\}\times\mathbb{Q})\cup((-\infty,0)\times\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ils sont localement connexes par arcs. En effet, soit U un ouvert de A qui contient $(x,y) \in A$. Si $(x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$, ça marche! Supposons $(x,y) = (0,y)$ avec $y \in \mathbb{Q}$. Comme la topologie sur $\mathbb{R}^2$ est la topologie produit, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$(x,y) \in]-\varepsilon,\varepsilon[\times]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\cap A \subseteq U \subseteq A.$$

On va montrer que dans l'ouvert $]-\varepsilon,\varepsilon[\times]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\cap A$ n'importe quel point est relié à (x,y) par un chemin et donc il est connexe par arcs. Si (x',y') est aussi dans $]-\varepsilon,\varepsilon[\times]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\cap A$, un chemin qui relie $(0,y)$ à (x',y') est obtenu en concatenant

- le chemin horizontal qui relie $(0,y)$ à $(\frac{\varepsilon}{2},y)$,
- le chemin vertical qui relie $(\frac{\varepsilon}{2},y)$ à $(\frac{\varepsilon}{2},y')$ et
- le chemin horizontal qui relie $(\frac{\varepsilon}{2},y')$ à (x',y').

On a bien montré que A et B sont localement connexes (par arcs). Pourtant l'intersection est homéomorphe à $\mathbb{Q}$, qui ne l'est pas.

(j) *VRAI*: On montre que le quotient d'un espace localement connexe (par arcs) l'est aussi en utilisant la caractérisation de connexité locale (par arcs) vue au cours. Soit U un ouvert du quotient et C une composante connexe (par arcs) de U,

$$C \subseteq U \subseteq X/_\sim.$$

On montre que C est ouvert dans le quotient, c'est-à-dire que $\pi^{-1}(C)$ est ouvert dans X. Soit $x \in \pi^{-1}(C)$, et $\tilde{C}$ la composante connexe (par arcs) de x dans $\pi^{-1}(U)$, alors

$$x \in \tilde{C} \subseteq \pi^{-1}(C) \subseteq U \subseteq X,$$

parce que $\pi(\tilde{C})$ est un connexe (par arcs) qui contient $[x]$ et il est donc contenu dans la composante connexe (par arcs) C. Comme X est localement connexe (par arcs), on a que $\tilde{C}$ est un ouvert, et $\pi^{-1}(C)$ contient un voisinage de x. $\square$

Homotopies

Exercice 7. Montrer que pour tout couple d'espaces topologiques pointés (X, x_0) et (Y, y_0), la relation d'homotopie $\simeq_*$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues pointées de (X, x_0) vers (Y, y_0).

Preuve. On montre que la relation d'homotopie donne une relation d'équivalence.

- *Reflexivité:* Si $f : X \to Y$, alors une homotopie de f vers f est

$$X \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X \xrightarrow{f} Y\ ,$$

donnée par $(x, t) \mapsto f(x)$.

- *Symétrie:* Si $f, g : X \to Y$ et $H : X \times I \to Y$ est une homotopie de f vers g, alors une homotopie de g vers f est donnée par

$$X \times I \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times (1-\mathrm{id}_I)} X \times I \xrightarrow{H} Y\ ,$$

donnée par $(x, t) \mapsto H(x, 1-t)$.

- *Transitivité:* Si $f, f', f'' : X \to Y$, $H : X \times I \to Y$ est une homotopie de f vers f' et $H' : X \times I \to Y$ est une homotopie de f' vers f'', alors une homotopie de f vers f'' est donnée en recollant

$$X \times [0, \tfrac{1}{2}] \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times (2\mathrm{id}_I)} X \times I \xrightarrow{H} Y\ ,$$

donnée par $(x, t) \mapsto H(x, 2t)$ et

$$X \times [\tfrac{1}{2}, 1] \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times (2\mathrm{id}_I - 1)} X \times I \xrightarrow{H'} Y\ ,$$

donnée par $(x, t) \mapsto H'(x, 2t-1)$.
L'homotopie $X \times I \to Y$ qui en résulte est donnée par

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Exercice 8.

(a) Soit X, Y et Z des espaces topologiques et $f \colon X \to Y$ une application continue. Montrer que f induit des applications sur les ensembles de classes d'homotopie

$$f^* \colon [Y, Z] \to [X, Z],\ [g] \mapsto [g \circ f] \quad \text{et} \quad f_* \colon [Z, X] \to [Z, Y],\ [h] \mapsto [f \circ h],$$

où on note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X vers Y.

(b) Soit $(X, x_0), (Y, y_0)$ et (Z, z_0) des espaces topologiques pointés et $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application continue pointée. Montrer que f induit des applications sur les ensembles de classes d'homotopie pointée

$$f^* \colon [Y, Z]_* \to [X, Z]_*,\ [g] \mapsto [g \circ f] \quad \text{et} \quad f_* \colon [Z, X]_* \to [Z, Y]_*,\ [h] \mapsto [f \circ h],$$

où on note $[X, Y]_*$ l'ensemble des classes d'homotopie pointée d'applications continues pointées de (X, x_0) vers (Y, y_0).

Solution.

(a) Pour montrer que f induit de telles applications f^* et f_* sur les ensembles de classes d'homotopies, il suffit de voir que précomposer et postcomposer par f préserve les homotopies. Soit $g, h\colon Y \to Z$ deux applications continues homotopes. On montre que $g \circ f, h \circ f\colon X \to Z$ sont aussi homotopes. Soit $H\colon Y \times I \to Z$ une homotopie de g vers h. Alors la composition $H \circ (f \times \mathrm{id}_I)\colon X \times I \to Z$ donne une homotopie de $g \circ f$ vers $h \circ f$. De la même manière, on montre que, si $g \sim h$, alors $f \circ g \sim f \circ h$.

(b) Similaire au point (a). Il faut juste remarquer que, si on a une homotopie **pointée** $H\colon Y \times I \to Z$, alors la composition $H \circ (f \times \mathrm{id}_I)\colon X \times I \to Z$ donne aussi une homotopie **pointée**, car f est pointée. □

Exercice 9. Soit X un espace topologique non vide.

(a) Le **cône** sur X est

$$CX := (X \times I)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (y, 1)$ pour x, $y \in X$. Montrer que le cône sur X est contractile.

(b) Le cylindre de X est $[0, 1] \times X$ par rapport à la topologie produit. Montrer que le cylindre de X est homotope à X.

Preuve.

(a) Soient $x_0 \in X$ et $v := [(x_0, 1)]$ le sommet du cône, $\varepsilon : CX \to \{v\}$ l'application constante, et $\iota : \{v\} \hookrightarrow CX$ l'inclusion du sommet dans le cône. On a que

- $\iota \circ \varepsilon \simeq \mathrm{Id}_{CX}$. En effet, on remarque d'abord que l'application

$$(\pi \times \mathrm{id}_I) : X \times I \times I \to CX \times I$$

est une application quotient. Ensuite, l'application continue $X \times I \times I \to CX$ donnée par $(x, s, t) \mapsto [(x, (1-t) \cdot s + t)]$ induit l'application continue $CX \times I \to CX$ donnée par $([(x, s)], t) \mapsto [(x, (1 - t) \cdot s + t)]$ qui est en fait une homotopie basée entre Id_{CX} et $\iota \circ \varepsilon$, l'application constante en $[(x_0, 1)]$.

- $\varepsilon \circ \iota = \mathrm{Id}_{\{v\}}$.

Donc CX et $\{v\}$ ont le même type d'homotopie et le cône CX est contractile.

(b) Soient $\varepsilon : X \times I \to X$ l'application donnée par $(x, t) \mapsto x$, et $\iota : X \hookrightarrow X \times I$ l'inclusion $x \mapsto (x, 0)$ de X comme base inférieure du cylindre. On a que

- $\iota \circ \varepsilon \simeq \mathrm{Id}_{X \times I}$. En effet, l'application $H : (X \times I) \times I \to X \times I$ donnée par $((x, t), s) \mapsto (x, s \cdot t)$ est une homotopie basée entre $\iota \circ \varepsilon$ et $\mathrm{Id}_{X \times I}$.
- $\varepsilon \circ \iota = \mathrm{Id}_X$.

Donc $X \times I$ et X ont le même type d'homotopie. □

Exercice 10. Montrer que les espaces topologiques suivants sont homotopiquement équivalents mais ils ne sont pas homéomorphes.

- S^1
- $S^1 \times \mathbb{R}$
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$

- $S^1 \times D^2$

Preuve. Le cercle S^1 n'est pas homéomorphe aux espaces $S^1 \times \mathbb{R}$, A et $S^1 \times D^2$, car S^1 sans deux points n'est pas connexe alors que les autres espaces sans deux points sont toujours connexes. Le cylindre infini $S^1 \times \mathbb{R}$ n'est pas compact et donc il n'est pas homéomorphe aux espaces A et $S^1 \times D^2$, qui le sont. L'anneau A et le tore $S^1 \times D^2$ ne sont pas homéomorphe, car $A \setminus (\{x^2 + y^2 = \frac{3}{2}\} \cap A)$ n'est pas connexe tandis que $S^1 \times D^2 \setminus \mathcal{C}$ est connexe pour tout cercle $\mathcal{C}$. (L'image d'un cercle par une homéomorphisme est aussi un cercle. En effet, la restriction de l'homéomorphisme au cercle est un homéomorphisme sur son image.)

Maintenant, on montre que tous les espaces sont homotopiquement équivalents à S^1, donc homotopiquement équivalents entre eux.
On considère l'inclusion $i\colon S^1 \to S^1 \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0)$, et la projection $\pi\colon S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$, alors $\pi \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ et $i \circ \pi \simeq_* \mathrm{id}_{S^1 \times \mathbb{R}}$ via l'homotopie $H(x, y, t) := (x, t \cdot y)$. Donc S^1 et $S^1 \times \mathbb{R}$ sont homotopiquement équivalents.
Le même raisonnement montre que S^1 et $S^1 \times D^2$ sont homotopiquement équivalents.
Finalement, soit $i\colon S^1 \to A$ l'inclusion et $a\colon A \to S^1$ définie par $a(x) := x/||x||$. Alors $a \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ et $i \circ a \simeq_* \mathrm{id}_A$ via l'homotopie $H(x, t) := (1-t) \cdot x + t \cdot a(x)$. Donc S^1 et A sont homotopiquement équivalents. □

Exercice 11. Soit X et X' deux espaces topologiques homotopiquement équivalents et Y et Y' deux espaces topologiques homotopiquement équivalents. Montrer que $X \times Y$ et $X' \times Y'$ sont homotopiquement équivalents.

Preuve. Comme X et X' sont homotopiquement équivalents, il existe $f\colon X \to X'$ et $g\colon X' \to X$ telles que $g \circ f \simeq_* id_X$ via une homotopie H_1 et $f \circ g \simeq_* id_{X'}$ via une homotopie H_2. De même, comme Y et Y' sont homotopiquement équivalents, il existe $h\colon Y \to Y'$ et $k\colon Y' \to Y$ telles que $k \circ h \simeq_* id_Y$ via une homotopie H_3 et $h \circ k \simeq_* id_{Y'}$ via une homotopie H_4. On prend $(f, h)\colon X \times Y \to X' \times Y'$ et $(g, k)\colon X' \times Y' \to X \times Y$ qui satisfont $(g, k) \circ (f, h) \simeq_* id_{X \times Y}$ via l'homotopie

$$M\colon X \times Y \times I \to X \times Y,\ (x, y, t) \mapsto (H_1(x, t), H_3(y, t)),$$

et $(f, h) \circ (g, k) \simeq_* id_{X' \times Y'}$ via l'homotopie

$$N\colon X' \times Y' \times I \to X' \times Y',\ (x, y, t) \mapsto (H_2(x, t), H_4(y, t)).$$

Donc $X \times Y$ et $X' \times Y'$ sont homotopiquement équivalents. □