TOPOLOGIE - SÉRIE 10

L'exercice 2 peut être rendu pour le 8 mai 2019.

Exercice 1. Montrer que être connexe par arcs est une propriété topologique.

Solution. Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont homéomorphes, alors il existe un homéomorphisme $h\colon (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$. Ainsi, h est continue, bijective et admet un inverse continu $h^{-1}\colon (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$. Comme l'image d'un espace connexe par arcs est connexe par arcs (Ex 3 a), on a le résultat.

Exercice 2. Démontrer que $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas homéomorphe à $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

Solution. On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe un homéomorphisme $f\colon S^1 \to D^2$. Soit $x_1 \neq x_2 \in S^1$. La restriction de f à $S^1 \setminus \{x_1, x_2\}$ est aussi un homéomorphisme

$$f_{S^1 \setminus \{x_1,x_2\}} : S^1 \setminus \{x_1, x_2\} \to D^2 \setminus \{f(x_1), f(x_2)\}$$

ce qui est absurde vu que $S^1 \setminus \{x_1, x_2\}$ n'est pas connexe par arcs et $D^2 \setminus \{f(x_1), f(x_2)\}$ est connexe par arcs. $\square$

Exercice 3. Comment est-ce que la connexité (par arcs) se comporte par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les énoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ l'est aussi.

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ est connexe (par arcs) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ l'est aussi.

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $A \subseteq X$ un sous-espace, alors A l'est aussi.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $A \subseteq X$ est connexe (par arcs), alors $\overline{A}$ l'est aussi.

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ l'est aussi.

(f) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ l'est aussi.

(g) Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont connexes (par arcs), alors $(X \times X', \mathcal{T} \star \mathcal{T}')$ l'est aussi.

(h) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles tels que $X = A \cup B$. Si A et B sont connexes (par arcs), alors X l'est aussi. Et si $A \cap B \neq \varnothing$?

(i) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles. Si A et B sont connexes (par arcs), alors $A \cap B$ l'est aussi.

(j) Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe (par arcs) et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/_\sim$ l'est aussi.

Solution. On commence par les énoncés sur la connexité.

(a) OUI, si $f(X) = A \cup B$ est une séparation de $f(X)$ en deux ouverts disjoints A et B, alors $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ est une séparation de X.

(b) NON; En effet, il suffit de considérer l'application constante $f : \{0, 1\} \to \{2\}$ par rapport aux topologies discrètes. Elle est bien continue, $\{2\}$ est connexe mais sa préimage $\{0, 1\}$ ne l'est pas.

Date: 29 avril 2019

(c) NON. En effet, $\mathbb{R}$ est connexe par rapport à la topologie standard, mais le sous-espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas.

(d) OUI, vu au cours.

(e) NON. En effet, $\mathbb{R}$ est connexe par rapport à la topologie standard, mais il ne l'est pas par rapport à la topologie discrète.

(f) OUI, comme cas particulier de (a).

(g) OUI, vu au cours.

(h) OUI *si* $A \cap B \neq \varnothing$, vu au cours. NON en général. En effet, les sous-espaces $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$ de $\mathbb{R}$ par rapport à la topologie standard sont connexes, mais leur réunion $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas.

(i) NON; En effet, il suffit de considérer $S^1 \setminus \{(1,0)\}$ et $S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ comme sous-espaces du cercle S^1. Ils sont connexes parce qu'on a vu qu'ils sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ (en utilisant la projection stereographique). Mais leur intersection ne l'est pas, parce qu'elle peut être écrite comme une réunion de deux ouverts disjoints non vides:

$$S^1 \setminus \{(1,0)\} \cap S^1 \setminus \{(-1,0)\} = S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup S^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}.$$

(j) OUI, comme cas particulier de (a).

Maintenant on considère la connexité par arcs.

(a) OUI. En effet, si $f(x)$ et $f(x')$ sont deux points arbitraires de $f(X)$, un chemin qui les relie est donné par $f \circ \lambda : I \to Y$, où $\lambda : I \to X$ est un chemin qui relie x et x' dans X.

(b) NON. En effet, il suffit de considérer l'application constante $f : \{0,1\} \to \{2\}$, par rapport aux topologies discrètes. Elle est bien continue, $\{2\}$ est connexe par arcs mais sa préimage $\{0,1\}$ n'est pas connexe par arcs.

(c) NON. En effet, $\mathbb{R}$ est connexe par arcs par rapport à la topologie standard, mais le sous-espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs.

(d) NON. En effet, on a vu au cours que la *courbe sinus du topologue* S est connexe par arcs, alors que son adhérence $\overline{S}$ ne l'est pas.

(e) NON. En effet, $\mathbb{R}$ est connexe par arcs par rapport à la topologie standard, mais il n'est pas connexe par rapport à la topologie discrète.

(f) OUI, comme cas particulier de (a).

(g) OUI. En effet, si (x,x') et (y,y') sont deux points arbitraires de $X \times X'$, un chemin qui les relie est donné par $(\lambda, \lambda') : I \to X \times X'$, où $\lambda : I \to X$ est un chemin qui relie x et y dans X et $\lambda' : I \to X'$ est un chemin qui relie x' et y' dans X.

(h) OUI *si* $A \cap B \neq \varnothing$; En effet, si a est un point de A et b est un point de B, un chemin qui les relie est donné par $\lambda \star \eta : I \to X \times X'$,

$$[\lambda \star \eta](t) := \begin{cases} \lambda(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \eta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

où x est un point dans $A \cap B \neq \varnothing$, $\lambda : I \to A \subseteq X$ est un chemin qui relie a et x dans A et $\eta : I \to B \subseteq X$ est un chemin qui relie x et b dans B.

NON en général. En effet, les sous-espaces $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$ de $\mathbb{R}$ par rapport à la topologie standard sont connexes par arcs, mais leur réunion $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas.

(i) NON. En effet, il suffit de considérer $S^1 \setminus \{(1,0)\}$ et $S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ comme sous-espaces du cercle S^1. Ils sont connexes par arcs parce qu'on a vu qu'ils sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ (en utilisant la projection stereographique). Mais leur intersection ne l'est pas, car elle n'est pas connexe.

(j) OUI, comme cas particulier de (a). $\square$

Exercice 4. (a) Est-ce qu'un ensemble fini est connexe par arcs par rapport à la topologie du complément fini?

(b) Est-ce que $\mathbb{R}$ est connexe par arcs par rapport à la topologie du complément fini? Et par rapport à la topologie du complément dénombrable? *Indication: Utiliser que $\mathbb{Q} \cap I$ est dense dans I et dénombrable pour montrer que chaque arc dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dén})$ est nécessairement constant.*

Solution. (a) Sur un ensemble fini, la topologie du complément fini coincid avec la topologie discrète. On sait déjà qu'un ensemble fini par rapport à la topologie discrète est connexe par arcs si et seulement si c'est un singleton.

(b) On sait déjà que $\mathbb{R}$ est connexe par arcs par rapport à la topologie standard. Comme la topologie du complément fini est plus grossière que la topologie standard, $\mathbb{R}$ est connexe par arcs par rapport à cette topologie la.

On va montrer maintenant que chaque chemin dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{dén}})$ est constant. Par conséquent, $\mathbb{R}$ n'est pas connexe par arcs par rapport à cette topologie. Soit $\lambda : ([0,1], \mathcal{T}_{\text{st}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{dén}})$ un chemin. On a que $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ est dénombrable, car $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ l'est, et donc fermé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{dén}})$. Ensuite, $\lambda^{-1}(\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]))$ est un fermé dans $[0,1]$, qui contient $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. En prenant les adhérences,

$$[0,1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \subseteq \overline{\lambda^{-1}(\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]))} = \lambda^{-1}(\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1])),$$

et donc $\lambda([0,1]) \subseteq \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]))$, qui est dénombrable. On peut alors restreindre le chemin λ à

$$\lambda : ([0,1], \mathcal{T}_{\text{st}}) \to (\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1])), \mathcal{T}_{\text{dén}}) = (\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1])), \mathcal{T}_{\text{disc}}).$$

Comme $[0,1]$ est connexe par rapport à la topologie standard, l'image $\lambda([0,1])$ est un connexe dans $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]))$ par rapport à la topologie discrète, et donc un singleton. Ainsi λ est constante, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Exercice 5. Voici deux applications du Théorème de la valeur intermediaire.

(a) Soit $g \colon (S^1, (\mathcal{T}_{\text{st}})_{S^1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ une application continue.
   - Considérer l'application $G \colon (S^1, (\mathcal{T}_{\text{st}})_{S^1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$, $x \mapsto g(x) - g(-x)$. Que peut-on dire sur sa continuité?
   - Montrer qu'il existe un $x \in S^1$ tel que $g(x) = g(-x)$.

(b) Soit $f \colon ([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}) \to ([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]})$ une application continue.
   - Considérer l'application graphe $F \colon ([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{st}})$, $x \mapsto (x, f(x))$. Que peut-on dire sur sa continuité? Et sur la continuité de $G(x) := f(x) - x$?
   - Montrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Preuve.

(a) • L'application G peut être écrite comme la composition de fonctions suivantes:

$$G:\ S^1 \xrightarrow{(\mathrm{id}_{S^1}, -\mathrm{id}_{S^1})} S^1 \times S^1 \xrightarrow{g\times g} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x,-x) \mapsto (g(x), g(-x)) \mapsto g(x) - g(-x).$$

On remarque que

— $x \in S^1 \mapsto (x,-x) \in S^1 \times S^1$ est continue car sa première composante, étant l'identité, est continue et sa deuxième composante, étant le changement de signe, est aussi continue (on l'a vu au cours d'analyse).

— $(x,y) \in S^1 \times S^1 \mapsto (g(x), g(y)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ est continue car chacune de ses composantes est continue (on l'a vu dans le Quiz 5);

— $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - y \in \mathbb{R}$ est la soustraction de nombres réels, qui est continue (on l'a vu au cours d'analyse).

Donc chaque morceau qui apparaît dans la composition de G est continu, ce qui montre que G est également continue.

• Si $G = 0$, alors $g(x) = g(-x)$ pour tout $x \in S^1$ et on a fini. Si G n'est pas toujours zéro, il existe un $y \in S^1$ tel que $G(y) \neq 0$. On remarque que $G(-y) = -G(y)$ a le signe opposé. Si on montre que S^1 est connexe, on peut utiliser le Théorème de la valeur intermédiaire pour conclure qu'il existe $x \in S^1$ tel que $G(x) = 0$, c'est-à-dire $g(x) = g(-x)$.

Pour voir que S^1 est connexe, on l'écrit comme l'image de l'application

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1.$$

Par rapport aux topologies standards, cette application est bien continue, car ses composantes sin et cos le sont (depuis le cours d'analyse). Comme $\mathbb{R}$ est connexe, l'image S^1 l'est aussi.

(b) • L'application graphe est toujours continue car ses composantes sont l'inclusion de I dans $\mathbb{R}$ et f, qui sont continues. L'application G peut être écrite comme la composition de fonctions suivantes:

$$G:\ I \xrightarrow{F} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x) - x.$$

On remarque que

— l'application graphe est continue;

— $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - y \in \mathbb{R}$ est la soustraction de nombres réels, qui est continue (on l'a vu au cours d'analyse).

Donc chaque morceux qui apparaît dans la factorisation de G est continu, ce qui montre que G est également continue.

• Si $G(0) = 0$ ou $G(1) = 0$, alors $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ et on a fini. Si G ne s'annule pas en 0 et 1, nécessairement $G(0) = f(0) > 0$ et $G(1) = f(1) - 1 < 0$. Comme I est connexe (en temps qu'intervalle), on peut utiliser le Théorème de la valeur intermédiaire et conclure qu'il existe $x \in I$ tel que $G(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

$\square$