TOPOLOGIE - QUIZ 7

Question 1. Soit X un ensemble quelconque. Quand X est-il de Hausdorff

(a) par rapport à la topologie discrète?
(b) par rapport à la topologie grossière?
(c) par rapport à la topologie du complément fini?
(d) par rapport à la topologie du complément dénombrable?

TOPOLOGIE - SÉRIE 8

L'exercice 3 peut être rendu pour le 17 avril 2019.

Exercice 1. (*) Montrer que le cube de Hilbert $X = \prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ muni de la topologie produit est homéomorphe à l'espace métrique $X' = \prod_{\mathbb{N}}[0, \frac{1}{n}]$ muni de la topologie induite de la distance $d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - y_n)^2} \quad \forall x, y \in X'$.

Exercice 2. Montrer que

(a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ est T_1 (tout singleton est fermé), mais n'est pas de Hausdorff.

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ est Hausdorff à base dénombrable, mais n'est pas régulier.

(c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ est normal.

Exercice 3. Par rapport aux topologies qu'on a vues sur $\mathbb{R}$, quand est-ce qu'il est régulier? Et normal?

Exercice 4. On définit les éléments suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$a_{m,n} = (\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}),\ m, n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_m = (\tfrac{1}{m}, 0),\ m \in \mathbb{N}^*, \qquad p = (0,0).$$

Posons

$$X = \left(\bigcup_{m,n \in \mathbb{N}^*} \{a_{m,n}\} \right) \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \{x_m\} \right) \cup \{p\}.$$

On définit une base de topologie $\mathcal{B}$ sur X comme le sous-ensemble des parties de X contenant:

- les singletons $\{a_{n,m}\}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$;
- les ensembles $B_n(x_m) := \{x_m\} \cup \{a_{m,k} \mid k \geqslant n\}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$;
- les ensembles $B_n(p) := \{p\} \cup \bigcup_{m \geqslant n} \{a_{m,k} \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On va montrer que X est un exemple d'espace topologique à base dénombrable et de Hausdorff qui n'est pas métrisable.

(a) Vérifier que $\mathcal{B}$ définit bien une base de topologie sur X. On peut alors munir X de la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

(b) Vérifier que X est à base dénombrable.

(c) Montrer que X est de Hausdorff.

(d) Montrer que $\{x_m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$ est un sous-espace fermé de X.

(e) Montrer que X n'est pas régulier. En déduire que X n'est pas métrisable.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que

(a) si $(X, \mathcal{T})$ est normal et A est un fermé de X, alors $(A, \mathcal{T}_A)$ est aussi normal.

(b) si $\mathcal{T}$ est la topologie cofinie sur X, alors $(X, \mathcal{T})$ est régulier si et seulement s'il est normal.

Exercice 6. Soit J un ensemble indénombrable. On va montrer que $\mathbb{R}^J$ muni de la topologie produit $\star_J \mathcal{T}_{\text{st}}$ n'est pas normal. Posons $X = (\mathbb{N}^*)^J$. Alors X est un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^J$ et il suffit donc de montrer que X n'est pas normal (Exercice 5 (a)). On regarde les éléments $x \in X$ comme des fonctions $x\colon J \to \mathbb{N}^*$.

Date: 8 avril 2019

(a) Soit $x \in X$ et $B \subset J$ un sous-ensemble fini. On pose

$$U(x, B) := \{y \in X \mid y(\alpha) = x(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in B\}.$$

Montrer que les ensembles $U(x, B)$ forment une base de X.

(b) On définit P_n comme le sous-ensemble de X contenant les fonctions $x \in X$ qui sont injectives sur $J \setminus x^{-1}(n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_1 et P_2 sont fermés et disjoints.

(c) Soit U, V deux ouverts de X tels que $P_1 \subseteq U$ et $P_2 \subseteq V$. Montrer qu'il existe une suite $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de J et une suite $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ d'entiers telles que, si on définit

$$B_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_i}\}$$

et $x_i \in X$ par les équations

$$\begin{aligned} x_i(\alpha_j) &= j \quad \text{pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n_{i-1} \\ x_i(\alpha) &= 1 \quad \text{pour tout } \alpha \notin B_{i-1}, \end{aligned}$$

pour chaque $i \geqslant 1$, alors $U(x_i, B_i) \subseteq U$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
Indication: Remarquer que $x_1(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in J$ et trouver $B_1 \subset J$ fini tel que $U(x_1, B_1) \subseteq U$. Procéder par récurrence.

(d) Soit $A = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ construit en (c). On définit $y \in X$ par les équations

$$\begin{aligned} y(\alpha_j) &= j \quad \text{pour tout } \alpha_j \in A \\ y(\alpha) &= 2 \quad \text{pour tout } \alpha \notin A. \end{aligned}$$

Trouver $B \subset J$ fini tel que $U(y, B) \subseteq V$ et $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $B \cap A \subseteq B_i$. Montrer que

$$U(x_{i+1}, B_{i+1}) \cap U(y, B)$$

est non vide. En déduire que $U \cap V$ est non vide et que X n'est pas normal.

Exercice 7. Comment est-ce que les propriétés de séparation se comportent par rapport aux constructions entre espaces topologiques? Démontrer ou réfuter les enoncés suivants.

(a) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f(X)$ est régulier (resp. normal).

(b) Si $(X', \mathcal{T}')$ est régulier (resp. normal) et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue, alors $f^{-1}(X')$ est régulier (resp. normal).

(c) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $A \subseteq X$, alors A est régulier (resp. normal).

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $\mathcal{T}'$ est une topologie plus fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est régulier (resp. normal).

(e) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $\mathcal{T}'$ est une topologie moins fine que $\mathcal{T}$, alors $(X, \mathcal{T}')$ est régulier (resp. normal).

(f) Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques réguliers (resp. normaux), alors leur produit $(\prod_{i \in I} X_i, *_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est régulier (resp. normal). Et si le produit est fini?

(g) Si $(X, \mathcal{T})$ est régulier (resp. normal) et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/_\sim$ est régulier (resp. normal).

Exercice 8. Trouver un exemple d'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ tel que le singletons $\{x\}$ ne sont pas tous fermés mais $\forall x \in X$ et $\forall B \subseteq X \setminus \{x\}$ fermé, $\exists\, U, V$ ouverts t.q. $x \in U$, $B \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$.